C. LEBOSSÉ et C. HÉMERY

ALGÈBRE

CLASSE DE SECONDE

DES LYCÉES ET COLLÈGES

FERNAND NATHAN — ÉDITEUR

ALGÈBRE

DES MÊMES AUTEURS

ARITHMÉTIQUE ET DESSIN GÉOMÉTRIQUE
Classe de Sixième

ARITHMÉTIQUE, ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE
Classe de Cinquième

ALGÈBRE, ARITHMÉTIQUE ET GÉOMÉTRIE
Classe de Quatrième

ARITHMÉTIQUE, ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE
Classe de Troisième

GÉOMÉTRIE PLANE
Classe de Seconde et 1re Année des E. N.

ALGÈBRE
Classe de Seconde et 1re Année des E. N.

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE
Classe de Première et 2e Année des E. N.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE
Classe de Première et 2e Année des E. N.

C. LEBOSSÉ
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Claude-Bernard

C. HÉMERY
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Collège Lavoisier

ALGÈBRE

**Classe de Seconde
des Lycées et Collèges**

PROGRAMME 1947

DOUZIÈME ÉDITION

FERNAND NATHAN, ÉDITEUR
18, rue Monsieur-le-Prince — Paris (6e)

PROGRAMMES DU 1er MAI 1947
DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRÉ

Classes de seconde A et B.

1° Rappel, à l'occasion de nombreux exercices, des règles du calcul arithmétique (en particulier fractions, racines carrées) et du calcul algébrique numérique et littéral. Rappel des propriétés des égalités et des inégalités et des identités remarquables.

2° Révision : vecteurs, mesure algébrique d'un vecteur sur un axe. Relation de Chasles. Repérage d'un point dans un plan par des coordonnées rectangulaires.

3° Fonction d'une variable, accroissements : fonction croissante ou décroissante dans un intervalle.

Étude des fonctions :

$$y = ax, \quad y = ax + b, \quad y = x^2, \quad y = ax^2, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{a}{x}.$$

Représentation graphique.

4° Résolution algébrique d'une équation numérique du premier degré à une inconnue, d'un système de deux équations numériques du premier degré à deux inconnues. Inéquation numérique du premier degré à une inconnue.

5° Résolution d'équations du second degré à une inconnue, à coefficients numériques.

Toutes ces questions donneront lieu à des applications et à des problèmes numériques empruntés en particulier au programme de physique de la classe.

Classes de seconde C et moderne.

1° Nombres algébriques (positifs, nul et négatifs). Opérations sur ces nombres. Propriétés fondamentales des opérations; puissances entières et positives. Rapports et proportions.

Monômes, polynômes; réduction, multiplication, identités remarquables. Fractions rationnelles : exercices de calcul.

2° Vecteurs. Mesure algébrique d'un vecteur sur un axe. Relation de Chasles. Repérage d'un point sur un axe. Repérage d'un point dans un plan par des coordonnées rectangulaires.

3° Fonction d'une variable; accroissements, fonction croissante ou décroissante dans un intervalle.

Étude de la fonction linéaire; représentation graphique. Pente d'une droite.

Étude des fonctions $y = x^2$, $y = ax^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{a}{x}$. Représentation graphique.

4° Résolution et discussion de l'équation et de l'inéquation du premier degré à une inconnue.

Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré; discussion des résultats.

5° Équation du second degré à une inconnue; existence et calcul des racines somme et produit des racines, signe des racines. Transformations du trinôme du second degré; signe du trinôme du second degré; inéquation du second degré à une inconnue.

NOTE DE L'ÉDITEUR

Cet ouvrage contient le développement du programme d'Algèbre de la classe de Seconde C et Moderne et convient par conséquent aux élèves de Seconde A et B qui suivent le cours facultatif.

Afin qu'il puisse être utilisé par les élèves de Seconde A et B qui se bornent au cours obligatoire, nous avons fait précéder d'un astérisque, les titres de leçons ou de paragraphes qui sont nettement en dehors de leur programme, laissant pour le reste toute initiative à chaque professeur.

A L G È B R E

LIVRE I. — CALCUL ALGÉBRIQUE

PREMIÈRE LEÇON

NOMBRES ALGÉBRIQUES *(Révision)*

1. Définitions. — La considération des grandeurs qui peuvent être évaluées dans deux sens différents, conduit aux définitions suivantes :

On appelle nombre algébrique l'ensemble formé par un nombre arithmétique précédé du signe + ou du signe —.

EXEMPLES : $(+12)$; $\left(+\frac{3}{4}\right)$ sont des nombres *positifs*.

(-7); $(-0{,}43)$ sont des nombres *négatifs*.

On appelle valeur absolue d'un nombre algébrique le nombre arithmétique obtenu en supprimant son signe.

Lorsqu'on représente un nombre algébrique par une lettre, son signe est incorporé à la lettre. La valeur absolue du nombre algébrique a se représente par le symbole $|a|$.

Deux nombres algébriques sont égaux s'ils ont même valeur absolue et même signe. Dans le cas contraire ils sont *inégaux*.

Ainsi : $(-0{,}25) = \left(-\frac{1}{4}\right)$; $(+3) \neq (-2{,}5)$.

Deux nombres algébriques sont opposés (ou symétriques) s'ils ont même valeur absolue et des signes différents.

$(+7{,}5)$ et $(-7{,}5)$ sont opposés.

Un nombre algébrique est nul si sa valeur absolue est nulle. On écrit alors simplement 0 sans signe.

ADDITION DES NOMBRES ALGÉBRIQUES

2. Définitions. — 1° *La somme de deux nombres algébriques de même signe est le nombre algébrique dont la valeur absolue est la somme des valeurs absolues et dont le signe est le signe commun.*

2° *La somme de deux nombres algébriques de signes différents est le nombre algébrique dont la valeur absolue est la différence des valeurs absolues et dont le signe est celui des deux nombres qui a la plus grande valeur absolue.*

Ainsi : $(+7) + (+13) = (+20)$; $(+7) + (-13) = (-6)$.

La somme de deux nombres opposés est nulle : $(+7) + (-7) = 0$.

3. Somme de plusieurs nombres. — *La somme de plusieurs nombres algébriques, rangés dans un certain ordre, est le nombre obtenu en ajoutant le premier au second, puis le résultat obtenu au troisième et ainsi de suite.*

Chacun des nombres a, b, c, d constitue un *terme* de la somme

$$a + b + c + d.$$

4. Convention. — Afin de simplifier l'écriture on convient :

1° *De supprimer le signe + devant un nombre positif isolé.*

2° *De supprimer les signes d'addition dans une somme de plusieurs termes numériques et d'écrire ceux-ci à la suite l'un de l'autre accompagnés de leur signe propre.*

$(+13) + (-9) + (+7) = (+11)$ s'écrit : $13 - 9 + 7 = 11$.

5. Propriétés des sommes.

1° COMMUTATIVITÉ. *On peut intervertir l'ordre des termes d'une somme*

$$a + b + c + d = b + d + a + c.$$

2° ASSOCIATIVITÉ. *On peut remplacer plusieurs termes par leur somme effectuée.*

$$a + b + c + d = a + (b + c + d).$$

6. Conséquences. — 1° *On peut supprimer, dans une somme, plusieurs termes dont la somme est nulle.*

$$15 - 9 - 8 + 9 = 15 - 8.$$

2° RÈGLE. — ***Pour calculer une somme numérique, on peut faire la somme des termes précédés du signe +, puis celle des termes précédés du signe —, et ajouter les deux nombres algébriques obtenus.***

$$-17 + 4 - 5 + 3 + 9 = (4 + 3 + 9) - (17 + 5) = 16 - 22 = -6.$$

SOUSTRACTION

7. Définition. — ***On appelle différence de deux nombres algébriques le nombre qu'il faut ajouter au second pour obtenir le premier.***

Si x est la différence entre a et b on écrit indifféremment :

$$x = a - b \qquad \text{ou} \qquad a = b + x.$$

8. Règle. — ***Pour retrancher un nombre algébrique, on peut ajouter son symétrique.***

Soit b' le symétrique du nombre b. On a $b + b' = 0$ et par suite :

$$a + b' = x + b + b' = x = a - b.$$

La différence $0 - b$ s'écrit simplement $-b$ et est égale à b'.

Par suite le symbole $-a$ *représente le symétrique du nombre* a, et on peut écrire :

$$a - b = a + (-b).$$

SOMMES ALGÉBRIQUES

9. Définition. — ***Une somme algébrique est une suite de nombres séparés par les signes + ou —.***

Exemple : $s = a - b + c - d.$

Pour calculer cette somme, on fait la différence $a - b$, puis on ajoute c et on retranche d. D'après la règle n° 8, le résultat est égal à la somme

$$s = a + (-b) + c + (-d).$$

Les propriétés des sommes (commutativité et associativité) s'étendent ainsi aux sommes algébriques (n°s 5 et 6), et il est clair que si on change les signes de tous les termes d'une somme algébrique, le résultat change également de signe. On en déduit :

10. Règle. — ***Pour ajouter une somme algébrique, on peut supprimer les parenthèses précédées du signe + sans changer aucun signe.***

Pour retrancher une somme algébrique on peut supprimer les parenthèses précédées du signe moins, à condition de changer les signes qui précèdent les nombres contenus dans ces parenthèses.

$$a + (b - c + d) - (e - f) = a + b - c + d - e + f.$$

$$-12 + (-7 + 4 - 2) - (-3 + 5) = -12 - 7 + 4 - 2 + 3 - 5.$$

Inversement : *On peut placer entre des parenthèses plusieurs termes d'une somme algébrique, en conservant les signes si les parenthèses sont précédées du signe +, et en changeant les signes si les parenthèses sont précédées du signe —.*

REMARQUE. — La règle précédente de suppression des parenthèses s'étend sans difficulté aux crochets et aux accolades.

$$a - \{ b + [c - (d - e) + f] \} = a - \{ b + [c - d + e + f] \}$$
$$= a - \{ b + c - d + e + f \} = a - b - c + d - e - f.$$

MULTIPLICATION

11. Définition. — ***Le produit de deux nombres algébriques est un nombre algébrique dont la valeur absolue est le produit des valeurs absolues des deux facteurs. Son signe est + si les deux facteurs sont de même signe, — s'ils sont de signes différents.***

Le signe de la multiplication est le signe ×. On le supprime ou on le remplace par un point devant une lettre ou une parenthèse.

$4 \times x$ s'écrit $4x$, $a \times b$ s'écrit $a.b$ ou ab.

La *règle des signes* résulte de la définition :

+ par + donne + — par + donne —
+ par — donne — — par — donne +

Ainsi : $(+7)(+4) = (-7)(-4) = +28$
$(-7)(+4) = (+7)(-4) = -28.$

Remarquons que $a \times (+1) = a$ et $a \times (-1) = -a$.

12. Produit de plusieurs facteurs. — On effectue le produit des deux premiers facteurs, puis on multiplie le résultat par le troisième et ainsi de suite.

RÈGLE. — 1° ***La valeur absolue d'un produit est égale au produit des valeurs absolues des facteurs.***

2° ***Un produit est positif si le nombre de facteurs négatifs est pair ou nul. Il est négatif si ce nombre est impair.***

13. Théorème. — ***Pour qu'un produit de facteurs soit nul il faut et il suffit que l'un de ses facteurs soit nul.***

En effet, si l'un des facteurs du produit $abcd$ est nul, le produit l'est aussi car sa valeur absolue est nulle. Inversement, si le produit est nul, l'un des facteurs au moins est nul, car si aucun des facteurs n'est nul, le produit ne peut l'être.

14. Propriétés des produits.

1° *La valeur d'un produit est indépendante de l'ordre des facteurs.*

2° *On ne change pas la valeur d'un produit en remplaçant deux ou plusieurs facteurs par leur produit effectué.*

3° *Pour multiplier une somme algébrique par un nombre on peut multiplier chaque terme de la somme algébrique par ce nombre et ajouter les produits obtenus.*

$$a.b.c.d = b.d.a.c = a.(bd).c.$$

$$\boxed{(a - b + c)m = am - bm + cm}$$

15. Conséquences. — 1° *Pour multiplier entre eux plusieurs produits de facteurs on peut former un produit unique contenant tous les facteurs.*

$$(abc).(de).(fg) = abcdefg.$$

2° *Pour multiplier un produit par un nombre il suffit de multiplier par ce nombre, un des facteurs du produit.*

$$(3abc)(-7) = 3.a.b.c.(-7) = -21a.b.c.$$

3° *Pour multiplier deux sommes algébriques on peut multiplier chaque terme de l'une successivement par chaque terme de l'autre et ajouter les produits obtenus.*

$$(a - b + c)(m - n) = (a - b + c)m - (a - b + c)n.$$
$$= am - bm + cm - an + bn - cn.$$

DIVISION

16. Définition. — ***Le quotient de deux nombres algébriques a et b est le nombre algébrique x dont le produit par b est égal à a.***

On écrit $a : b = x$ ou $\frac{a}{b} = x$ ce qui signifie $a = bx$.

Le symbole $\frac{a}{b}$ se nomme rapport ou fraction algébrique.

a est le *numérateur* du rapport et *b le dénominateur*. Il est clair que :

$$\frac{a}{b} \times b = a.$$

17. Règle. — ***Le quotient de deux nombres algébriques a pour valeur absolue le quotient de leurs valeurs absolues et pour signe + s'ils sont de même signe, — s'ils sont de signes différents.***

$$\frac{+21}{+7} = \frac{-21}{-7} = +3 \qquad \frac{+21}{-7} = \frac{-21}{+7} = -3.$$

La règle des signes est identique à celle du produit (n° 11).

REMARQUES. — 1° *La division d'un nombre par zéro est impossible.* Le symbole $\frac{a}{0}$ n'a aucun sens, car il n'existe pas de nombre dont le produit par 0 soit égal au nombre (non nul) a.

2° *Pour qu'un rapport soit nul il faut et il suffit que son numérateur soit nul, sans que son dénominateur le soit.*

Si $a = 0$, on a $\frac{a}{b} = 0$ et dans ce cas seulement.

18. Inverse d'un nombre. — C'est le quotient de $+ 1$ par ce nombre *Le produit de deux nombres inverses est égal à $+ 1$.*

L'inverse de a est $\frac{1}{a}$ et par suite $a \times \frac{1}{a} = 1$.

Règle. — ***Diviser a par b équivaut à multiplier a par $\frac{1}{b}$***

$$\boxed{\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}}$$

En effet : $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \left(\frac{a}{b} \times b\right) \times \frac{1}{b} = a \times \frac{1}{b}$.

19. Applications. — On peut donc remplacer une division par une multiplication. Il résulte des nos 14 et 15 que :

1° *Pour diviser une somme algébrique par un nombre, on peut diviser chaque terme de la somme algébrique par ce nombre et ajouter les quotients obtenus.*

2° *Pour diviser un produit par un nombre, il suffit de diviser un des facteurs par ce nombre.*

$$\frac{a - b + c}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \frac{c}{n}$$

$$\frac{a.b.c}{n} = \frac{a}{n} \cdot b. c.$$

PROPRIÉTÉS DES RAPPORTS

20. Théorème. — ***On ne change pas la valeur d'un rapport en multipliant (ou divisant) ses deux termes par un même nombre non nul.***

Posons $\frac{a}{b} = x$. On a : $a = bx$ et par suite $an = (bx)n = (bn)x$,

ce qui montre (nº 16) que : $\frac{an}{bn} = x.$

En remplaçant n par son inverse on a de même $\frac{a:n}{b:n} = x.$

D'où :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = \frac{a:n}{b:n}}$$

21. Applications. — 1º ***Simplification d'un rapport :***

$$\frac{-35ab}{15ac} = \frac{-7b \times 5a}{3c \times 5a} = \frac{-7b}{3c}.$$

2º ***Réduction de plusieurs rapports au même dénominateur :***

EXEMPLE : Les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ et $\frac{e}{f}$

sont respectivement égaux à $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$ et $\frac{bde}{bdf}$.

22. Somme algébrique de plusieurs rapports. — *On commence par réduire les rapports au même dénominateur, puis on effectue la somme algébrique des numérateurs obtenus et on la divise par le dénominateur commun.*

Il résulte du nº 19 que :

$$\boxed{\frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a-b+c}{n}}$$

23. Produit de plusieurs rapports. — *On effectue le produit des numérateurs et on le divise par le produit des dénominateurs.*

Posons : $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$, $z = \frac{e}{f}$.

On a : $a = bx$, $c = dy$, $e = fz$ et par suite

$$ace = bx.dy.fz = bdf.xyz \qquad \text{(nº 14)}$$

D'où $xyz = \frac{ace}{bdf}$ ce qui montre que :

$$\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}}$$

CAS PARTICULIER : $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1.$

L'inverse du rapport $\frac{a}{b}$ *est le rapport* $\frac{b}{a}$

24. Quotient de deux rapports. — *On multiplie le rapport dividende par l'inverse du rapport diviseur.*

En effet (n° 18) $$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}}$$

25. Applications.

1° $$\frac{a}{b} \times n = \frac{a}{b} \times \frac{n}{1} = \frac{an}{b} = \frac{a}{b : n}$$

2° $$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b} \times \frac{1}{n} = \frac{a}{bn} = \frac{a : n}{b}$$

3° $$\frac{\frac{5a}{7b}}{\frac{5c}{7d}} = \frac{5a \times 7d}{5c \times 7b} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Dans un quotient de deux rapports on peut simplifier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

EXERCICES

1. Caractériser par un nombre algébrique l'augmentation de température entre les températures suivantes :

+ 7° et + 23°; + 32° et + 13°; — 23° et — 7°.
— 19° et — 32°; — 17° et + 11°; + 9° et — 23°.

2. En prenant minuit pour origine et la minute pour unité, caractériser par un nombre algébrique les heures suivantes :

Jour suivant : 2 h. 10; 9 h. 45; 16 h. 28.
Jour précédent : 23 h. 17; 18 h. 52; 9 h. 30.

3. Exprimer en années, mois et jours le temps écoulé entre les deux dates suivantes : 23 juin 63 av. J.-C. et 13 mars 14 apr. J.-C. de midi à midi. (L'an 10 apr. J.-C. signifie la 10[e] année après la naissance de J.-C. Il n'y a donc pas d'année 0).

4. Calculer les sommes algébriques suivantes :

$$\left(-\frac{7}{11}\right) + \left(+\frac{3}{22}\right) - \left(+\frac{7}{6}\right) - \left(-\frac{19}{33}\right)$$

$$\left(2 - \frac{1}{3} - \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{7}{5} - 3\right) + \left(5 - \frac{1}{15}\right).$$

— **Réduire les expressions suivantes :**

5. $[(a - b) - (7 - b)] + [13 - a + (a - 9)]$.

6. $[(a + b - c) + (b + c - a)] - [(a + b + c) - (c + a - b)]$.

7. $\{ a - [b - (c + 2)] \} - \{ a + [c - (a - 1)] \} + b - 1$.

8. **Effectuer les produits suivants :**

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{9}{7}\right); \quad (-1{,}2)\left(-\frac{5}{3}\right); \quad \left(+\frac{1}{3}\right)(-1{,}5)\left(-\frac{4}{5}\right).$$

9. **Calculer les quotients suivants :**

$$\left(+\frac{7}{4}\right):\left(-\frac{21}{8}\right); \quad \left(-\frac{85}{3}\right):\left(-\frac{17}{5}\right); \quad \left(-\frac{18}{5}\right):\left(+\frac{16}{25}\right).$$

— **Simplifier les expressions suivantes :**

10. $3(a + b - c) - 2(a - b + c) + 5(a - b - c)$.

11. $(x + y)(a + b) + (x - y)(a - b) - (ax + by)$.

12. $5[-x + 3(y - 2)] - 2[x + 5(y - 3)]$.

13. $[7(x + 3) - 5][2 - 5(y - 1)] - 84(x + y)$.

— **Effectuer les opérations suivantes :**

14. $\dfrac{-39 + 65 - 26}{-13}$

15. $\dfrac{105 - 630 + 84}{+21}$

16. $\dfrac{9 - \frac{1}{3} + \frac{5}{6}}{-5 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}}$

17. $\dfrac{8 - \frac{1}{5} - \frac{7}{10}}{1 - \frac{3}{2} - \frac{5}{4}}$

18. $\dfrac{-5 + 7 - 9}{2 + 11 - 1} \times \dfrac{-5 - 3}{3 - 10}$

19. $\dfrac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \times \dfrac{\frac{7}{6} - \frac{1}{3}}{\frac{4}{5} - 1} \times \dfrac{-18}{10}$

20. $\dfrac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} : \dfrac{1 + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}}$

21. $\dfrac{1 - \frac{1}{4} + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{4}}}{1 + \frac{1}{4} - \dfrac{1}{1 + \frac{1}{4}}}$

DEUXIÈME LEÇON

I. PUISSANCES

26. Définition. — ***On appelle puissance d'un nombre le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre.***

Ainsi $a^5 = a.a.a.a.a.$

a^5 se lit « a puissance 5 » ou simplement « a cinq ». Le nombre entier arithmétique 5 *est l'exposant de la puissance.*

Rappelons que : $a^1 = a$

a^2 est le *carré* de a

a^3 est le *cube* de a.

27. Signe d'une puissance. — Il résulte du n° 12 que :

1° ***Toute puissance d'exposant pair est positive.***

2° ***Toute puissance d'exposant impair est du signe du nombre.***

Ainsi le carré d'un nombre non nul est positif. Le cube d'un nombre positif est positif et le cube d'un nombre négatif est négatif. D'autre part

$$(-a)^n = a^n \quad \text{si } n \text{ est pair}$$
$$(-a)^n = -a^n \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

28. Puissance d'un produit. — ***Pour élever un produit à une puissance, on peut élever chaque facteur à cette puissance.***

Ainsi, $(abc)^3 = abc.abc.abc = aaa.bbb.ccc = a^3.b^3.c^3$.

En général :

$$\boxed{(a\ b\ c)^n = a^n.b^n.c^n}$$

29. Puissance d'un rapport. — ***Pour élever un rapport à une puissance, on peut élever chacun des termes à cette puissance.***

Ainsi : $$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a^4}{b^4}.$$

En général : $$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

30. Produit de plusieurs puissances d'un même nombre. — *Le produit de plusieurs puissances d'un même nombre est la puissance de ce nombre dont l'exposant est égal à la somme des exposants des facteurs.*

Ainsi : $$a^3.a^2 = (a.a.a).(a.a) = a.a.a.a.a. = a^5.$$

D'où : $$a^3a^2. = a^{3+2}.$$

D'une façon générale : $$\boxed{a^m.a^n.a^p = a^{m+n+p}}$$

31. Puissance d'une puissance. — *La puissance d'une puissance d'un nombre est la puissance de ce nombre dont l'exposant est le produit des deux exposants.*

Ainsi : $$(a^7)^3 = a^7 \times a^7 \times a^7 = a^{7+7+7} = a^{21}.$$

D'où : $$(a^7)^3 = a^{7\times 3}.$$

En général : $$\boxed{(a^m)^p = a^{mp}.}$$

On en déduit :

1° $$(a^m)^p = (a^p)^m.$$

2° $$a^{12} = (a^3)^4 = [(a^3)^2]^2.$$

32. Quotient de deux puissances d'un même nombre.

De l'égalité : $a^8 = a^5 \times a^3$ on déduit (n° 16) :

$$\frac{a^8}{a^5} = a^3 = a^{8-5}$$

Et, en prenant les inverses (n° 23)

$$\frac{a^5}{a^8} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^{8-5}}$$

D'une façon générale :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{a^m}{a^p} = a^{m-p} & \text{si } m > p. \\[2ex] \dfrac{a^m}{a^p} = \dfrac{1}{a^{p-m}} & \text{si } m < p. \end{array}}$$

33. Exposant nul. Exposant négatif.

1° $\frac{a^m}{a^m} = 1.$ Or l'application de la règle précédente donne :

$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0.$ On convient que $a^0 = 1$ quel que soit a.

2° Convenons de même que : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Nous pourrons écrire :

$$\frac{a^5}{a^8} = \frac{1}{a^3} = a^{-3} = a^{5-8}.$$

Ces conventions étant admises :

Le quotient de deux puissances d'un même nombre est égal à la puissance de ce nombre dont l'exposant (positif, nul ou négatif) est égal à la différence des exposants du dividende et du diviseur.

II. RACINES D'UN NOMBRE ARITHMÉTIQUE

34. Définitions. — ***On appelle racine carrée du nombre arithmétique A le nombre arithmétique x dont le carré est égal à A.***

On écrit : $x = \sqrt{A}$ ce qui signifie : $x^2 = A$.

$\sqrt{A}$ se lit « racine carrée de A ». Le signe $\sqrt{\ }$ se nomme *radical* et le nombre A est le *radicande*

Ainsi : $9 = \sqrt{81}$ car $9^2 = 81$; $\frac{3}{5} = \sqrt{\frac{9}{25}}$ car $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.

Si le radicande A n'est pas le carré d'un entier ou d'une fraction, le symbole $\sqrt{A}$ définit un *nombre irrationnel* que l'on peut calculer à une approximation donnée. Ainsi :

$$\sqrt{2} = 1{,}414... \qquad \sqrt{3} = 1{,}732...$$

On appelle racine cubique du nombre arithmétique A, le nombre arithmétique x dont le cube est égal à A.

Si $x^3 = A$ on écrit : $x = \sqrt[3]{A}$ (lire : « racine cubique de A »).

D'une façon générale :

On appelle racine $n^{ième}$ du nombre arithmétique A le nombre arithmétique x tel que $x^n = A$.

On écrit : $x = \sqrt[n]{A}$ (lire : « racine $n^{ième}$ de A »).

L'entier n est *l'indice* de la racine. Nous admettrons que tout nombre A a une racine $n^{\text{ième}}$ et une seule.

Il résulte de la définition que :

$$\boxed{(\sqrt[n]{A})^n = A} \quad \text{et} \quad \boxed{\sqrt[n]{a^n} = a.}$$

35. Racine d'un produit. — ***La racine d'un produit de facteurs est égale au produit des racines de chaque facteur.***

$$\boxed{\sqrt[n]{a.b.c} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.}$$

Posons $x = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}$ et calculons x^n.

$$x^n = (\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c})^n = (\sqrt[n]{a})^n.(\sqrt[n]{b})^n.(\sqrt[n]{c})^n = a.b.c.$$

D'où : $x = \sqrt[n]{a.b.c}$.

EXEMPLE :

$$\sqrt{19.600} = \sqrt{4\times 49\times 100} = \sqrt{4}.\sqrt{49}.\sqrt{100} = 2\times 7\times 10 = 140.$$

36. Racine d'un rapport. — ***La racine d'un rapport est égale au rapport des racines de chacun des termes.***

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Posons $x = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. On a : $x^n = \left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \dfrac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \dfrac{a}{b}$.

Soit $x = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.

EXEMPLES :

$$\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{64}} = \frac{3}{8} \qquad \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

37. Racine d'une puissance. Puissance d'une racine. — ***On peut indifféremment extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de a^p ou élever $\sqrt[n]{a}$ à la puissance p.***

$$\boxed{\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p}$$

Ainsi $\sqrt[5]{a^3} = \sqrt[5]{a.a.a} = \sqrt[5]{a}.\sqrt[5]{a}.\sqrt[5]{a} = (\sqrt[5]{a})^3$.

EXEMPLES : $(\sqrt{a})^3 = \sqrt{a^3}$ $\qquad (\sqrt[3]{a^2})^4 = \sqrt[3]{a^8}$.

38. Racine d'une racine. — *La racine d'une racine d'un nombre est la racine de ce nombre ayant pour indice le produit des indices.*

$$\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[mp]{a}.$$

Soit par exemple : $x = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}$. On a $x^4 = (\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}})^4 = \sqrt[3]{a}$.

Puis $x^{12} = (x^4)^3 = (\sqrt[3]{a})^3 = a$. Donc $x = \sqrt[12]{a} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}$.

— Ainsi pour calculer $\sqrt[4]{a}$ on pourra calculer $\sqrt{\sqrt{a}}$.

39. Simplifications de la racine d'une puissance. — *On peut multiplier ou diviser par un même nombre entier l'indice et l'exposant de la racine d'une puissance.*

$$\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}$$

Ainsi $\sqrt[10]{a^{15}} = \sqrt[2\times5]{a^{3\times5}} = \sqrt[2]{\sqrt[5]{(a^3)^5}}$. Or $\sqrt[5]{(a^3)^5} = a^3$.

Donc : $\sqrt[10]{a^{15}} = \sqrt[2]{a^3}$.

Applications. — 1° $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$ $\qquad \sqrt[5]{a^{15}} = a^3$.

2° $\sqrt[10]{a^{35}} = \sqrt{a^7} = \sqrt{a^6 . a} = \sqrt{a^6}.\sqrt{a} = a^3\sqrt{a}$.

3° $\sqrt[5]{a^2}.\sqrt[15]{a^4} = \sqrt[15]{a^6}.\sqrt[15]{a^4} = \sqrt[15]{a^6.a^4} = \sqrt[15]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^2}$.

On peut ainsi toujours simplifier un produit de racines de différentes puissances d'un même nombre.

III. RACINES D'UN NOMBRE ALGÉBRIQUE

40. Racine carrée. — *On appelle racine carrée d'un nombre algébrique A tout nombre algébrique x dont le carré est égal à A.*

x doit donc vérifier l'égalité $x^2 = A$.

41. Théorème. — 1° *Un nombre négatif n'a pas de racine carrée.*

2° *Zéro a pour racine unique : zéro.*

3° *Un nombre positif a deux racines carrées qui sont deux nombres opposés.*

Un carré étant toujours positif ou nul, l'égalité $x^2 = A$ ne peut être vérifiée si A est négatif. Seul $x = 0$ vérifie l'égalité $x^2 = 0$. Soit à chercher les racines de $+ 49$. La valeur absolue de x élevée au carré doit donner 49. Elle est donc égale à 7. Son signe est $+$ ou $-$ et on obtient deux valeurs pour x : $+ 7$ et $- 7$.

42. Convention. — ***Le symbole $\sqrt{A}$ désigne la racine carrée positive du nombre positif A.***

Les deux racines carrées de A sont donc : $+ \sqrt{A}$ et $- \sqrt{A}$.

Remarque. — Il en résulte que : $\begin{cases} \sqrt{a^2} = a & \text{si } a \text{ est positif.} \\ \sqrt{a^2} = -a & \text{si } a \text{ est négatif.} \end{cases}$

Ainsi : $\sqrt{7^2} = + 7$ et $\sqrt{(-5)^2} = + 5$.

43. Racine cubique. — ***On appelle racine cubique du nombre algébrique A, tout nombre algébrique x dont le cube est égal à A.***

x doit vérifier l'égalité $x^3 = A$.

44. Théorème. — ***Tout nombre algébrique a une racine cubique et une seule de même signe que lui.***

Soit à chercher x tel que $x^3 = - 125$. La valeur absolue de x élevée au cube doit donner 125, elle est donc égale à $\sqrt[3]{125} = 5$. D'autre part (n° 26) le signe de x est $-$ car le signe de x^3 est celui de x. On a donc $x = - 5$.

Le symbole $\sqrt[3]{A}$ désigne sans ambiguïté la racine cubique de A.

$$\text{Si } x^3 = A \quad \text{on écrit} \quad x = \sqrt[3]{A}.$$

Notons l'égalité : $\sqrt[3]{-A} = - \sqrt[3]{A}$.

45. Généralisation. — ***On appelle racine $n^{\text{ième}}$ du nombre algébrique A tout nombre algébrique x tel que $x^n = A$.***

1° **Si n est pair.** On montre comme pour $n = 2$ que les nombres positifs ont deux racines opposées, les nombres négatifs n'en ont pas.

$\sqrt[n]{A}$ désigne la racine positive de A et $- \sqrt[n]{A}$ la racine négative de A.

2° **Si n est impair.** Tout nombre algébrique A possède une racine $n^{\text{ième}}$ de même signe que lui désignée par le symbole $\sqrt[n]{A}$.

Exemples : $+ 625$ a deux racines $4^{\text{ièmes}}$: $+ 5$ et $- 5$.

$- 625$ n'a pas de racine $4^{\text{ième}}$.

$$\sqrt[5]{32} = + 2 \quad \text{et} \quad \sqrt[5]{-32} = - 2.$$

EXERCICES

— Calculer les expressions suivantes :

22. $(-3)^2 \cdot (+4)^2 \cdot (-5)^2.$ **23.** $(+2)^3 \cdot (-5)^3 \cdot (+7)^3.$

24. $\left(-\frac{8}{7}\right)^2 \cdot \left(+\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \left(-\frac{7}{10}\right)^2.$ **25.** $\left(-\frac{7}{25}\right) \cdot \left(+\frac{4}{7}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)^3.$

26. $\frac{(-2)^5 \cdot (+5)^9 \cdot (-9)^3}{(-10)^6 \cdot (+15)^4}.$ **27.** $\frac{(-18)^7 \cdot (+2)^4 \cdot (-50)^3}{(-25)^6 \cdot (-4)^5 \, (-27)^2}.$

28. $\frac{\left(+\frac{4}{3}\right)^4 + \left(-\frac{5}{4}\right)^3 - 5\left(\frac{4}{3} - \frac{5}{4}\right)}{\left(-\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{5}{6}}$ **29.** $\frac{\left(\frac{3^2}{2^3 \times 5}\right)^3 + (3^2 + 2^4)\left(\frac{2^2}{5^3}\right)\left(\frac{3^3}{2^4 \times 5}\right)}{1 + \left(\frac{2^2}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{2^2}\right)^2}$

— Calculer les racines suivantes :

30. $\sqrt[3]{216}.$ **31.** $\sqrt[4]{625}.$ **32.** $\sqrt[5]{7776}.$

33. $\sqrt{\frac{256}{729}}.$ **34.** $\sqrt[3]{\frac{125}{512}}.$ **35.** $\sqrt[4]{\frac{5^8}{3^{12} \times 7^4}}.$

36. $\sqrt{100 \times 25 \times 36}.$ **37.** $\sqrt[3]{27 \times 343 \times 729}.$ **38.** $\sqrt[5]{32 \times 243 \times 3125}.$

39. $\sqrt{(-12)^4}.$ **40.** $\sqrt[4]{(\sqrt{3} - 2)^4}.$ **41.** $\sqrt[3]{-125 \times 1331}.$

— Simplifier les expressions :

42. $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[10]{a^7} \cdot \sqrt[15]{a^2}.$ **43.** $\sqrt[12]{a^7} \cdot \sqrt[20]{a^3} \cdot \sqrt[15]{a^4}.$

44. $\sqrt[15]{a} \cdot \sqrt[21]{a^2} \cdot \sqrt[33]{a^6}.$ **45.** $\sqrt[20]{a^3} \cdot \sqrt[28]{a^5} \cdot \sqrt[35]{a^4}.$

46. Calculer x tel que : $x^3 = (-2)^3 \times \left(-\frac{8}{81}\right)^3 \times \left(+\frac{5}{4}\right)^3 \times \left(-\frac{9}{10}\right)^3.$

47. Calculer x tel que : $x^2 = (-3)^4 \times \left(-\frac{125}{7}\right) \times \left(+\frac{8}{25}\right)^3 \times \left(+\frac{5}{49}\right).$

48. Calculer x tel que : $x^5 = \left(+\frac{5}{4}\right)^3 \times \left(-\frac{16}{27}\right)^2 \times \left(-\frac{12}{10^5}\right).$

49. Les nombres a et b étant positifs, démontrer la relation :

$$\sqrt{a^3 + \sqrt[3]{a^6 b^3}} + \sqrt{b^3 + \sqrt[3]{a^3 b^6}} = \sqrt{(a + b)^3}.$$

Vérifier cette relation pour $a = 5$ et $b = 4$.

50. Calculer les expressions :

$$A = \frac{(3\sqrt{5})^3 + 3\sqrt{5^3}}{\sqrt{30 \times 24} - \sqrt[4]{25 \times 16}} \qquad B = \frac{\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)^3 \cdot (+5)^2}}{\sqrt[3]{\left(-\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{5}{24}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^4}}$$

TROISIÈME LEÇON

ÉGALITÉS

46. Définition. — L'égalité de deux nombres algébriques a et b s'écrit :

$$a = b.$$

a est le premier membre et b le second membre de l'égalité.

Quand on considère l'égalité de deux sommes algébriques :

$$a - b + c = d - f$$

chacun des nombres a, $-b$, c, etc... constitue un *terme* de l'égalité.

47. Théorème I. — ***On peut ajouter ou retrancher un même nombre aux deux membres d'une égalité.***

En effet, si a et b sont égaux il en est de même de $a + c$ et $b + c$ d'une part et de $a - c$ et $b - c$ d'autre part.

$$\boxed{a = b} \quad \textit{entraîne} \quad \boxed{\begin{array}{l} a + c = b + c \\ a - c = b - c \end{array}}$$

48. Applications. — 1° ***Dans une égalité, on peut supprimer un terme commun aux deux membres.***

De l'égalité $a + c = b + c$ on déduit $a = b$ en retranchant c aux deux membres.

2° **Transposition d'un terme.** De l'égalité $a = b + c$, on déduit en retranchant c aux deux membres.

$$a - c = b.$$

La nouvelle égalité ne diffère de la première que par la place du terme c qui a changé de membre et en même temps de signe.

Dans une égalité, on peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre à condition de changer le signe qui le précède.

Ou plus simplement :

Tout terme qui change de membre change de signe.

3° ***On peut ajouter (ou retrancher) membre à membre deux ou plusieurs égalités.***

Cela revient à ajouter (ou à retrancher) des nombres égaux aux deux membres de la première. Ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \\ f = g \end{array}\right\} \quad \textit{entraînent} \quad \left\{\begin{array}{c} a + c + f = b + d + g \\ a - c = b - d \\ a - c + f = b - d + g \end{array}\right.$$

49. Théorème II. — ***On peut multiplier (ou diviser) les deux membres d'une égalité par un même nombre non nul.***

Si a et b sont égaux, il en est de même de ac et bc d'une part et de $a : c$ et $b : c$ d'autre part :



$$\boxed{a = b} \quad \textit{entraîne} \quad \boxed{\begin{array}{c} ac = bc \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c} \end{array}}$$

50. Applications. — 1° ***On peut changer les signes des deux membres d'une égalité.***

Cela revient à multiplier les deux membres par — 1.

2° ***On peut multiplier (ou diviser) membre à membre deux égalités.***

Cela revient à multiplier (ou diviser) les deux membres de la première par deux nombres égaux.

Des égalités $a = b$ et $c = d$

on déduit $ac = bd$ et $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$.

51. Théorème III. — ***On peut élever à une même puissance les deux membres d'une égalité.***

Si a et b sont égaux, il en est de même de a^n et b^n

$$\boxed{a = b} \quad \textit{entraîne} \quad \boxed{a^n = b^n}$$

52. Remarque. — Il importe de remarquer que l'égalité $a^n = b^n$ n'entraine pas toujours $a = b$.

1° ***Si n est impair.*** Les nombres algébriques a et b ont même valeur absolue, et aussi le même signe, celui de a^n et b^n. Ils sont donc égaux.

Ainsi $a^3 = b^3$ *entraîne* $a = b$.

2° ***Si n est pair.*** On a encore $|a| = |b|$ mais a et b peuvent être de même signe ou de signes différents et par suite être égaux ou opposés.

Ainsi $a^2 = b^2$ *entraîne* $\left\{\begin{array}{l} a = b \\ \text{ou} \\ a = -b. \end{array}\right.$

RAPPORTS ÉGAUX. PROPORTIONS

53. Théorème. — ***Dans une suite de rapports égaux, on forme un rapport égal à chacun d'eux en divisant la somme des numérateurs par la somme des dénominateurs.***

Soit $$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = k.$$

On a (n° 16) : $a = bk$; $a' = b'k$; $a'' = b''k$.

D'où : $a + a' + a'' = bk + b'k + b''k = (b + b' + b'')k.$

Ce qui montre que k est égal au quotient de $a + a' + a''$ par $b + b' + b''$.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a + a' + a''}{b + b' + b''}}$$

54. Corollaire. — On démontrerait de même que :
$$ma + na' + pa'' = (mb + nb' + pb'')k.$$

D'où : $$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{ma + na' + pa''}{mb + nb' + pb''}}$$

55. Nombres proportionnels. — ***On dit que les nombres a, a', a''... sont proportionnels aux nombres b, b', b''... quand :***

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots$$

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit qu'il y ait un rapport constant k entre un nombre de la première suite et le nombre correspondant de la seconde. Le nombre k se nomme le *coefficient de proportionnalité.*

56. Proportion. — ***On appelle proportion l'égalité de deux rapports :***

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

a et d sont les termes *extrêmes*, b et c sont les *moyens*.

57. Théorème fondamental. — *Pour que quatre nombres forment une proportion il faut et il suffit que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens.*

En effet $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entraîne $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$

D'où $\boxed{ad = bc}$

Réciproquement, en divisant l'égalité précédente successivement par bd, cd, ab, et ac. On obtient :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ ; \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}\ ; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \text{d'où :}$$

58. Corollaire. — *Dans une proportion on peut intervertir les moyens, intervertir les extrêmes ou remplacer chaque rapport par son inverse.*

(Pratiquement au lieu de lire verticalement $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, lire de gauche à droite : $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ etc...).

59. Transformations d'une proportion. — D'après le n° 53 on peut écrire :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}.$$

Ce qui permet, en considérant deux des rapports égaux, d'écrire de nouvelles proportions. On obtient ainsi :

$$\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d} \qquad \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \qquad \text{etc... et} \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

60. Quatrième proportionnelle. — *On appelle quatrième proportionnelle aux trois nombres a, b et c le nombre x tel que :*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \qquad \text{ou :} \qquad ax = bc.$$

$$\text{D'où :} \qquad x = \frac{bc}{a}.$$

61. Moyenne proportionnelle (ou géométrique). — *On dit que le nombre x est moyen proportionnel entre a et b si :*

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{x^2 = ab}$$

Si a et b sont de même signe, on peut prendre (n° 41) :

$$x = \sqrt{ab} \quad \text{et} \quad x = -\sqrt{ab}.$$

Ainsi -3 et -12 admettent deux moyennes proportionnelles :

$$+6 \text{ et } -6 \quad \text{car} \quad 6^2 = (-6)^2 = (-12)(-3).$$

INÉGALITÉS

62. Définition. — ***On dit qu'un nombre a est supérieur à un nombre b si la différence $a - b$ est positive.***

On écrit $a > b$ ou $b < a$.

car inversement b est inférieur à a si la différence $b - a$ est négative. Il en résulte que :

1° ***Tout nombre positif est supérieur à zéro, tout nombre négatif est inférieur à zéro et réciproquement.***

$a > 0$ signifie que a est positif.

$a < 0$ signifie que a est négatif.

Par suite $a > b$ équivaut à $a - b > 0$ ou $b - a < 0$.

2° ***Tout nombre positif est supérieur à tout nombre négatif.***

3° ***Si deux nombres sont positifs, le plus grand est celui qui a la plus grande valeur absolue. Si deux nombres sont négatifs le plus grand est celui qui a la plus petite valeur absolue.***

Ainsi $-15 < -7 < 0 < +3 < +12$.

63. Théorème I. — ***On peut ajouter (ou retrancher) un même nombre aux deux membres d'une inégalité.***

$$\boxed{a > b} \quad \textit{entraîne} \quad \boxed{\begin{array}{l} a + c > b + c \\ a - c > b - c \end{array}}$$

En effet $(a + c) - (b + c)$ et $(a - c) - (b - c)$ sont égaux à $a - b$ qui est positif par hypothèse.

Il en résulte que dans une inégalité on peut :

1° ***Supprimer un terme commun aux deux membres.***

2° ***Transposer un terme d'un membre dans l'autre à condition de changer le signe qui le précède.***

Autrement dit $a > b + c$ équivaut à $a - b > c$.

64. Théorème II. — ***On peut ajouter membre à membre des inégalités de même sens.***

Soient les inégalités de même sens

$$a > b \qquad c > d \qquad e > f$$

Les différences $a - b$, $c - d$, $e - f$ étant positives, il en résulte que : $(a - b) + (c - d) + (e - f) > 0$ ou $(a + c + e) - (b + d + f) > 0$ d'où :

$$a + c + e > b + d + f.$$

REMARQUE. — Le théorème subsiste si l'une des inégalités est remplacée par une égalité.

65. Théorème III. — ***On peut multiplier (ou diviser) les deux membres d'une inégalité par un même nombre non nul à condition de :***

Conserver le sens si le nombre est positif.

Changer le sens si le nombre est négatif.

$a > b$	*entraîne*	$ma > mb$ si $m > 0$ $ma < mb$ si $m < 0$

$a - b$ étant positif le produit $m(a - b)$ ou $ma - mb$ est du signe de m.

Ainsi de l'inégalité :

$$\frac{a}{d} < \frac{b}{d} \quad \text{on déduit} \quad \frac{a}{d}d^2 < \frac{b}{d}d^2 \quad \text{donc} \quad ad < bd.$$

— ***Si on change les signes des deux membres d'une inégalité il faut aussi en changer le sens.***

Car cela revient à multiplier les deux membres par -1.

On peut aussi dire que $a > b$ équivaut à $-b > -a$ (n° 63) et par suite à $-a < -b$.

66. Théorème IV. — ***On peut élever au carré les deux membres d'une inégalité dont les deux membres sont de même signe à condition de :***

Conserver le sens si les deux membres sont positifs.

Changer le sens si les deux membres sont négatifs.

Si $a > b > 0$, il résulte du théorème III que :

$a^2 > ab$ et $ab > b^2$. Donc que $a^2 > b^2$.

Si $0 > a > b$ il résulte de même que :

$a^2 < ab$ et $ab < b^2$. Donc que $a^2 < b^2$.

Si $a > 0 > b$. On ne peut rien conclure *a priori* pour a^2 et b^2

67. Réciproque. — ***Deux nombres positifs sont dans le même ordre de grandeur que leurs carrés.***

Soient a et b deux nombres positifs et supposons $a^2 < b^2$.

On ne peut avoir $a \geqslant b$ car cela entraînerait $a^2 \geqslant b^2$ ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc $a < b$.

Ainsi $4\sqrt{3} < 7$ car $(4\sqrt{3})^2 = 48$ est inférieur à $7^2 = 49$.

68. Remarque importante. — L'analogie avec les égalités conduit souvent aux erreurs suivantes qu'il importe d'éviter :

1° *Retrancher membre à membre deux inégalités.*

2° *Multiplier (ou diviser) les deux membres d'une inégalité par un nombre négatif sans changer le sens.*

En particulier :

Changer les signes des termes d'une inégalité en conservant le sens.

3° *Supprimer un dénominateur commun littéral dont le signe n'est pas connu.*

4° *Élever au carré les deux membres d'une inégalité sans tenir compte du signe de chacun des deux membres.*

EXERCICES

51. Trouver deux nombres x et y, sachant que $x + y = a$ et $x - y = b$.
Application : $a = -127$, $b = +53$.

52. Trouver trois nombres x, y et z sachant que :

$$y + z = a \qquad z + x = b \qquad x + y = c.$$

Commencer par déterminer la somme $x + y + z$.
Application : $a = 37$; $b = 59$; $c = 12$.

53. Déterminer trois nombres x, y et z proportionnels à a, b et c sachant que :

$$4x - y + 2z = m.$$

Application : $a = 2$; $b = -3$; $c = 5$ et $m = 693$.

54. Montrer que si $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k > 0$, on a aussi $k = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

En déduire 3 nombres proportionnels à 1, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sachant que la somme de leurs carrés est égale à 189.

55. Démontrer que si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k^2$, on a aussi :

$$\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = \sqrt{(a + b + c)(a' + b' + c')}.$$

— De la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ déduire les suivantes et étudier la réciproque.

56. $\frac{2a + 3b}{5a - 7b} = \frac{2c + 3d}{5c - 7d}$

57. $\frac{ma + nb}{m'a + n'b} = \frac{mc + nd}{m'c + n'd}$.

58. $\frac{a^2d - bc^2}{ab - cd} = \frac{abcd}{ad^2 + b^2c}$

59. $\frac{a^2 + b^2}{ac + bd} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}$.

60. $\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{ab}{cd}$

61. $\frac{5a - 10b - 2c + 4d}{20a + 35b - 8c - 14d} = \frac{3a - 6b + c - 2d}{12a + 21b + 4c + 7d}$.

— Démontrer les égalités suivantes :

62. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

63. $\sqrt{5} - \sqrt{3} = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$

64. $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{2}$

65. $\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = 2$

66. $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

67. $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 6$.

— Comparer les nombres suivants :

68. 26 et $15\sqrt{3}$

69. 97 et $56\sqrt{3}$

70. $4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ et 3

71. $7 - 4\sqrt{3}$ et $5\sqrt{2} - 7$

72. $2 + \sqrt{3}$ et $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

73. $7(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ et 22.

74. Montrer que si a et b ne sont pas égaux on a toujours : $a^2 + b^2 > 2ab$.

75. Démontrer la relation : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqq (a + b)(c + d)$.

76. Montrer que pour des nombres distincts, on a toujours :

$\frac{a + b}{2} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$; $\frac{a + b + c}{3} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$, etc...

77. On suppose $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$. Montrer que l'on a : $\frac{a}{b} < \frac{ab + cd + ef}{b^2 + d^2 + f^2} < \frac{e}{f}$.

78. On considère 2 nombres positifs x et y. On pose :

$$A = \frac{1}{2}(x + y) \qquad G = \sqrt{xy} \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{H} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

A, G et H sont les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique de x et y).

Démontrer les relations : $G^2 = AH$ et $H < G < A$.

QUATRIÈME LEÇON

VECTEURS

69. Définition. — ***On appelle vecteur un segment de droite orienté.*** Ainsi (fig. 1) le segment AB orienté de A vers B définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ (lire « vecteur AB »).

A *est l'origine du vecteur et* B *son extrémité.*

La droite indéfinie AB se nomme le *support du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ et définit sa *direction.* La distance AB est la *longueur* ou le *module* du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

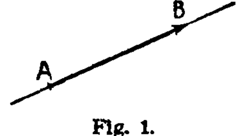


Fig. 1.

70. Rapport de deux vecteurs parallèles. — ***C'est le nombre algébrique qui a pour valeur absolue le rapport des longueurs des deux vecteurs et pour signe + ou — suivant que les deux vecteurs sont de même sens ou de sens contraires.***

Ainsi (fig. 2) les vecteurs parallèles et de sens contraires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont pour rapport $-\frac{3}{5}$. On écrit :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = -\frac{3}{5} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$$

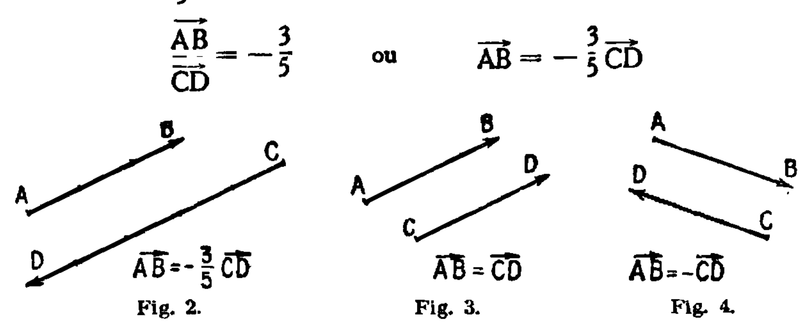


Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

Deux vecteurs parallèles sont égaux s'ils ont même longueur et même sens. Ils sont opposés s'ils sont de même longueur et de sens contraires.

leur rapport est égal à + 1 s'ils sont égaux et — 1 s'ils sont opposés.

On a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \text{ (fig. 3)} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \text{ (fig. 4).}$$

REMARQUE. — Les définitions précédentes s'étendent au cas où les vecteurs sont portés par le même support.

71. Axe. — ***On appelle axe une droite orientée.*** — Ainsi la droite $x'x$ orientée de x' vers x constitue l'axe $x'x$ (fig. 5).

x' ——————————→ x

Fig. 5.

Le sens ainsi défini se nomme *le sens de l'axe $x'x$* ou *sens positif de l'axe.* Le sens opposé est *le sens négatif.*

72. Mesure algébrique d'un vecteur porté par un axe. — ***C'est le nombre algébrique dont la valeur absolue est la longueur du vecteur et dont le signe est + ou — suivant que le vecteur a le même sens que l'axe ou le sens opposé.***

Soit un axe $x'x$ (fig. 6), sur lequel nous avons choisi une unité de longueur.

x' A B D C x

Fig. 6.

La mesure algébrique de $\overrightarrow{AB}$ sur $x'x$ est + 3. On écrit :

$$\overline{AB}_{x'x} = +3 \quad \text{ou} \quad \text{simplement} \quad \overline{AB} = +3.$$

On aurait de même $\overline{CD} = -5$; $\overline{BA} = -3$.

On voit que $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ ***sont deux nombres opposés.***

$$\overline{AB} = -\overline{BA}.$$

Remarquons qu'il faut éviter de confondre les notations :

AB : segment AB ou longueur AB.

$\overrightarrow{AB}$: vecteur d'origine A et d'extrémité B.

$\overline{AB}$: mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$

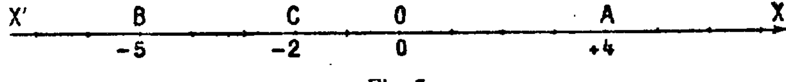


Fig. 7.

73. Repérage d'un point sur une droite. — Soit un axe X'X (fig. 7). Choisissons sur cet axe un point fixe O, appelé ***origine des abscisses.***

On appelle abscisse du point M la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

$\overline{OA} = +4$ l'abscisse de A est $+4$.

$\overline{OB} = -5$ l'abscisse de B est -5.

Réciproquement à tout nombre algébrique correspond un point de l'axe X'X et un seul admettant ce nombre pour abscisse. Ainsi au nombre -2 correspond le point C tel que $\overline{OC} = -2$. On obtient C en portant à partir de O, dans le sens négatif, un segment OC = 2. Autrement dit :

La position d'un point sur un axe est déterminée par son abscisse.

74. Application aux nombres algébriques. — Lorsqu'un point M parcourt l'axe X'X dans le sens positif, son abscisse x prend toutes les valeurs algébriques possibles dans l'ordre croissant (fig. 8).

X' M→ A O B X

$-\infty$ x -4 -3 -2 -1 0 $+1$ $+2$ $+3$ $+4$ $+5$ $+\infty$

Fig. 8.

En effet de X' à O, $x = \overline{OM}$ est négatif et sa valeur absolue diminue, donc (n° 62) x croît. De O à X, x est positif et sa valeur absolue augmente, donc x croît également.

On en déduit la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point M d'abscisse x appartienne à l'une des portions de l'axe X'X limitées par les points A(-2) et B($+3$) :

1° Demi-droite AX' : $x < -2$

2° Demi-droite BX : $x > +3$

3° Segment AB : $-2 < x < +3$.

Lorsque M s'éloigne indéfiniment sur l'axe, la valeur absolue de son abscisse x finit par dépasser toute valeur fixée à l'avance. On dit que x devient infini et on écrit :

$x = +\infty$ si M s'éloigne dans le sens positif.

$x = -\infty$ si M s'éloigne dans le sens négatif.

75. Somme de deux vecteurs. — Considérons deux vecteurs consécutifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire tels que l'extrémité du premier soit l'origine du second (fig. 9). Par définition le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme géométrique (ou le vecteur résultant) des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

La somme géométrique de deux vecteurs consécutifs est le vecteur qui a pour origine celle du premier et pour extrémité celle du second.

On écrit : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

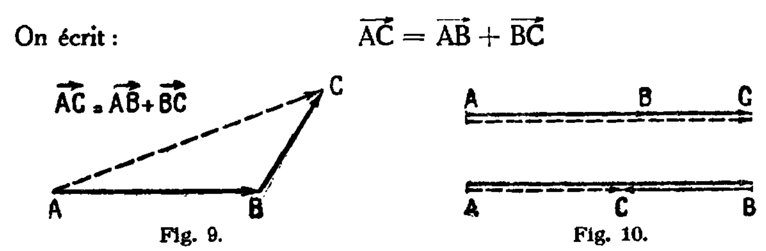


Fig. 9. Fig. 10.

Cette définition s'applique à deux vecteurs consécutifs de même support (fig. 10).

Pour construire la somme de deux vecteurs non consécutifs, il suffit de construire deux vecteurs consécutifs qui leur sont respectivement égaux En particulier, la somme de deux vecteurs de même origine $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ s'obtient en terminant le parallélogramme AOBC (fig. 11). On a :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et puisque } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

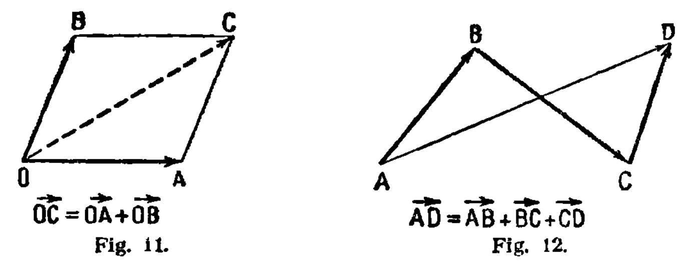


Fig. 11. Fig. 12.

On peut aussi définir la somme de plusieurs vecteurs. Ainsi (fig. 12), on a par définition :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.$$

Il importe de remarquer que la longueur de la somme de deux ou plusieurs vecteurs n'est pas en général égale à la somme des longueurs de ces vecteurs.

RELATION DE CHASLES

76. Théorème I. — ***La mesure algébrique de la somme de deux vecteurs consécutifs portés par un même axe est égale à la somme des mesures algébriques de ces vecteurs.***

Il s'agit de montrer que l'*égalité vectorielle* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

entraîne l'***égalité algébrique*** $\boxed{\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}}$

connue sous le nom de relation de Chasles (mathématicien français 1793-1880). Observons qu'il existe six cas de figure possibles (fig. 13).

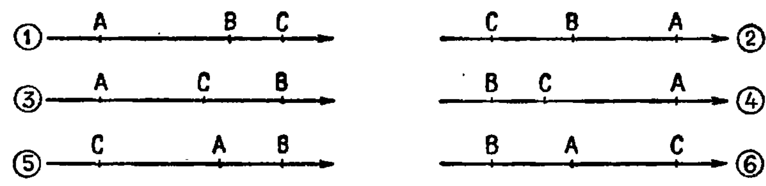


Fig. 13.

On a, par exemple, visiblement pour le 5e cas :

$$\overline{CB} = \overline{CA} + \overline{AB} \quad \text{ou} \quad -\overline{BC} = -\overline{AC} + \overline{AB}.$$

D'où en transposant : $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$

77. Remarque. — Il faut trois égalités arithmétiques pour traduire, selon les cas, la position relative de trois points A, B et C en ligne droite :

$$AC = AB + BC \qquad AC = AB - BC \quad \text{ou} \quad AC = BC - AB.$$

Au contraire : ***La relation de Chasles est générale et est indépendante du sens de l'axe.***

A B D C

Fig. 14.

Si M, N et P sont alignés, on a toujours : $\overline{MP} = \overline{MN} + \overline{NP}$ (intercaler la lettre N entre M et P qui figurent au premier membre) quel que soit le sens suivant lequel la droite MP est orientée.

78. Généralisation. — La relation de Chasles se généralise pour un nombre quelconque de vecteurs consécutifs. Si A, B, C et D sont alignés (fig. 14) on a :

$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = (\overline{AB} + \overline{BC}) + \overline{CD}.$$

D'où : $$\boxed{\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}.}$$

79. Théorème II. — ***La mesure algébrique d'un vecteur porté par un axe est égale à l'abscisse de son extrémité, diminuée de l'abscisse de son origine.***

Appliquons la formule de Chasles aux trois points O, A et B (fig. 15 et 16)

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}.$$

D'où : $$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

Désignons par a et b les abscisses de A et de B. Nous obtenons

$$\boxed{\overline{AB} = b - a.}$$

Fig. 15.

Fig. 16.

Ainsi (fig. 15) : $a = +2 \quad b = +5, \quad \overline{AB} = +3 \quad = (+5) - (+2)$
et (fig. 16) : $a = +4 \quad b = -1, \quad \overline{AB} = -5 \quad = (-1) - (+4).$

80. Abscisse du milieu d'un segment. — ***Le milieu d'un segment a pour abscisse la demi-somme des abscisses des extrémités de ce segment.***

Soit M le milieu du segment AB (fig. 15 et 16). Les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont égaux :

$$\overline{AM} = \overline{MB} \quad \text{soit} \quad \overline{OM} - \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{OM}.$$

D'où : $$2\,\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} \quad \text{et} \quad \overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}.$$

Désignons par a, b et m les abscisses de A, B et M. Nous obtenons :

$$\boxed{m = \frac{a+b}{2}.}$$

Ainsi (fig. 15) : $\overline{OM} = \frac{+2+5}{2} = \frac{7}{2}$ et (fig. 16) : $\overline{OM} = \frac{+4-1}{2} = \frac{3}{2}.$

EXERCICES

79. Démontrer que le rapport de deux vecteurs AB et CD portés par un même axe est égal au rapport de leurs mesures algébriques. Autrement dit :

$$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD} \qquad \text{équivaut à} \qquad \overline{AB} = k\,\overline{CD}.$$

80. Soient deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ et I le milieu de AB. Démontrer que

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

81. On considère un triangle ABC dont le centre de gravité est G et un point M quelconque.

1° Démontrer l'égalité : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0.$

2° En déduire la relation : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}.$

82. 1° Vérifier la relation de Chasles $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, sachant que $\overline{OA} = +7$ $\overline{OB} = -5$ et $\overline{OC} = +13$.

2° Vérifier les relations : $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ et $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$.

3° Calculer les abscisses de M, N et P milieux de BC, CA et AB.

83. Soient sur un axe deux points A(a) et B(b). Déterminer les abscisses des points M et N qui partagent AB en 3 parties égales.
Application : $a = +15$, $b = -9$.

84. Reprendre l'exercice précédent pour les points qui partagent AB en 4 puis en 6, et en 8 parties égales.

85. On prend sur un axe deux points A et B d'abscisses a et b. Déterminer l'abscisse x du point M tel que $\overline{MA} = k\,\overline{MB}$ (k nombre donné).

Application : $a = -4$ $\quad b = +10$ $\quad$ et $\quad k = -2{,}5$.

86. Etant donnés 4 points A, B, C et D d'un axe dont les abscisses sont a, b, c et d :

1° Montrer qu'il existe en général un point M tel que $\overline{MA}\,.\,\overline{MB} = \overline{MC}\,.\,\overline{MD}$.

2° Qu'arrive-t-il si AB et CD ont même milieu ?

Application : $a = +8$, $b = -3$, $c = +11$ et $d = +1$.

87. Soient sur un axe 4 points A, B, C et D, tels que $\overline{AC}\,.\,\overline{BD} + \overline{AD}\,.\,\overline{BC} = 0$.

1° Montrer que les abscisses a, b, c et d de ces 4 points vérifient la relation

$$(a + b)(c + d) = 2(ab + cd).$$

2° I et J désignant les milieux de AB et CD en déduire les relations suivantes :

a) $\overline{OA}.\overline{OB} + \overline{OC}.\overline{OD} = 2\overline{OI}.\overline{OJ}$ $\qquad$ *b)* $\overline{IA}^2 = \overline{IB}^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$.

c) $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$ $\qquad$ *d)* $\dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}} + \dfrac{1}{\overline{BC}} + \dfrac{1}{\overline{BD}} = 0.$

88. On considère sur un axe d'origine O, les points A(a), B(b) et C(c). Démontrer les relations :

1° $\overline{OA}.\overline{BC} + \overline{OB}.\overline{CA} + \overline{OC}.\overline{AB} = 0.$

2° $\overline{OA}^2.\overline{BC} + \overline{OB}^2.\overline{CA} + \overline{OC}^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0.$

89. Soient O le milieu du segment AB et M un point quelconque de la droite AB. Démontrer que :

1° $\overline{MA} + \overline{MB} = 2\,\overline{MO}$ 2° $\overline{MA}\,.\,\overline{MB} = \overline{OM}^2 - \overline{OA}^2$.

3° $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\left(\overline{OM}^2 + \overline{OA}^2\right)$. 4° $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2\,\overline{OM}\,.\,\overline{AB}$.

90. Etant donnés deux points A(a) et B(b) d'un axe d'origine O :

1° Calculer l'abscisse x du point I tel que $m\,\overline{IA} + n\,\overline{IB} = 0$.

2° Démontrer la double relation :

$$m\,\overline{OA}^2 + n\,\overline{OB}^2 - (m + n)\,\overline{OI}^2 = m\,\overline{IA}^2 + n\,\overline{IB}^2 = \frac{mn}{m + n}\,\overline{AB}^2.$$

91. Soient 3 points A, B et C d'abscisses a, b, c sur un axe d'origine O. Montrer qu'il existe un point I tel que $\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} = 0$. Calculer son abscisse et démontrer les relations :

1° $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} - 3\,\overline{OI} = 0$.

2° $\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - 3\,\overline{OI}^2 = \overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 + \overline{IC}^2$.

3° $\overline{OB}.\overline{OC} + \overline{OC}.\overline{OA} + \overline{OA}.\overline{OB} - 3\overline{OI}^2 = \overline{IB}.\overline{IC} + \overline{IC}.\overline{IA} + \overline{IA}.\overline{IB}$.

4° $3(\overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 + \overline{IC}^2) = -6(\overline{IB}.\overline{IC} + \overline{IC}.\overline{IA} + \overline{IA}.\overline{IB}) = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2$

CINQUIÈME LEÇON

EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES

81. Définition. — ***Une expression algébrique est un ensemble de nombres, donnés ou représentés par des lettres, sur lesquels sont indiquées des opérations à effectuer.***

EXEMPLES : $3ax^2 - 2by \qquad \frac{x^2 + 4}{x - 2} \qquad 2x + \sqrt{x^2 - y^2}.$

Une expression algébrique est *rationnelle* quand elle ne renferme pas de lettres sous un radical. Sinon elle est *irrationnelle.*

Une expression rationnelle est *entière* si elle ne renferme pas de dénominateur littéral. Dans le cas contraire elle est *fractionnaire.*

$\frac{3}{4}x^2 - y\sqrt{2}$ *est une expression algébrique entière.*

$\frac{2x + 3}{x - 4}$ *est une fraction rationnelle.*

$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *est une expression algébrique irrationnelle.*

82. Valeurs numériques d'une expression algébrique. Expressions algébriques équivalentes. — La valeur numérique d'une expression algébrique, pour un ensemble de valeurs attribuées aux lettres qui y figurent, s'obtient en remplaçant chaque lettre par sa valeur et en effectuant les opérations indiquées.

Pour $a = +4$; $b = 5$; $c = -6$ l'expression $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ a pour valeur numérique :

$$\frac{-5 + \sqrt{25 + 4 \times 4 \times 6}}{8} = \frac{-5 + \sqrt{121}}{8} = \frac{-5 + 11}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Parfois il est impossible de calculer, pour certaines valeurs attribuées aux

lettres, la valeur numérique d'une expression. Ainsi pour $x = +1$ les expressions $\frac{x+1}{x-1}$ et $\sqrt{x-2}$ n'ont pas de valeur numérique. Dans la suite, nous supposerons toujours que l'on n'attribue aux lettres que des valeurs pour lesquelles le calcul est possible.

Deux expressions algébriques sont équivalentes lorsqu'elles prennent la même valeur numérique pour tous les systèmes de valeurs attribuées aux lettres.

$(a-b)x$ et $ax-bx$ sont équivalentes.

83. Calcul algébrique. — Le calcul algébrique a pour but la transformation des expressions algébriques en expressions équivalentes.

Simplifier ou réduire une expression, c'est l'écrire sous une forme équivalente plus simple et par conséquent plus facile à calculer numériquement.

Puisque les lettres qui figurent dans une expression sont mises à la place d'un nombre, nous pourrons appliquer à ces lettres les règles de calcul relatives aux nombres, sans changer la valeur numérique de l'expression, ce qui justifie les règles de calcul littéral que nous allons étudier.

MONÔMES

84. Définition. — ***Un monôme est une expression algébrique où les seules opérations à effectuer sur les lettres sont des multiplications et des élévations à une puissance.***

Soit le monôme : $\left(-\frac{1}{3}\right) \times a \times x^2 \times \left(2+\frac{1}{4}\right) \times a^2 \times b^5$.

Nous pouvons réduire les facteurs numériques, puis modifier l'ordre des facteurs et remplacer plusieurs d'entre eux par leur produit effectué. Nous obtenons successivement :

$\left(-\frac{1}{3}\right) a.x^2 \left(\frac{9}{4}\right) a^2.b^5$ puis $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{9}{4}\right) aa^2.b^5.x^2$ et finalement :

$$-\frac{3}{4}a^3b^5x^2.$$

Le monôme a été réduit :

$a^3b^5x^2$ ***est la partie littérale du monôme.***

$-\frac{3}{4}$ ***est le coefficient numérique du monôme.***

Le coefficient numérique d'un monôme n'est pas toujours apparent :

$a^2x^4y^2$ a pour coefficient $+ 1$.

$- a^3b^3x^7$ a pour coefficient $- 1$.

85. Monômes semblables. — ***Deux monômes sont semblables lorsqu'ils ont même partie littérale.***

EXEMPLES : $-3a^2b^5x$, $\frac{7}{4}a^2b^5x$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2b^5x$.

— Considérons la somme algébrique de plusieurs monômes semblables :

$$4a^2x^3y - \frac{5}{2}a^2x^3y + \frac{3}{4}a^2x^3y.$$

Cette somme est le développement du produit :

$$\left(4 - \frac{5}{2} + \frac{3}{4}\right) \times (a^2x^3y).$$

La somme algébrique proposée est donc équivalente au monôme :

$$\frac{9}{4}a^2x^3y.$$

La somme algébrique de plusieurs monômes semblables est un monôme semblable à ces monômes et dont le coefficient numérique est la somme algébrique des coefficients des monômes considérés.

La réduction d'une somme de monômes semblables se ramène donc à celle des coefficients.

86. Degré d'un monôme. — ***On appelle degré d'un monôme par rapport à une lettre, l'exposant de cette lettre dans le monôme.***

$\frac{8}{3}ab^4x^2$ est du premier degré en a, du quatrième degré en b et du second degré en x.

On appelle degré d'un monôme par rapport à plusieurs lettres la somme des degrés par rapport à chacune de ces lettres.

$\frac{8}{3}ab^4x^2$ est du cinquième degré en a et b, du troisième degré en a et x et du septième degré en a, b et x.

REMARQUE. — Lorsqu'une lettre ne figure pas dans un monôme, on peut dire que son exposant dans le monôme est zéro ou que le monôme est de degré 0 par rapport à cette lettre.

$3a^2x^5$ ou $3a^2x^5y^0$ est de degré 0 en y.

POLYNÔMES

87. Définition. — ***Un polynôme est la somme de plusieurs monômes.*** Chacun de ces monômes constitue un ***terme*** du polynôme.

EXEMPLES : $3a^2b - ab^3 - \frac{2}{5} a^3 + 4b^6$

$$2x - x^2 + 5 - \frac{4}{3} x^3.$$

Lorsqu'un polynôme ne contient que deux termes, on l'appelle ***binôme.*** S'il en contient trois, c'est un ***trinôme.***

$2x^3 - 5x$ *est un binôme.*

$4x^2 - 3x + 5$ *est un trinôme.*

88. Réduction des termes semblables. — Quand un polynôme contient plusieurs termes semblables on peut les grouper, puis remplacer chacun des groupes formés par le monôme équivalent.

Ainsi le polynôme : $7x^3 + 8x - 3 + 4x - 2x^3 - 5x + 2.$

s'écrit : $(7x^3 - 2x^3) + (8x + 4x - 5x) + (-3 + 2)$

Soit : $5x^3 + 7x - 1.$

Le polynôme obtenu est équivalent au polynôme proposé. On dit que ce polynôme a été réduit ou que l'on a fait la réduction des termes semblables.

89. Degré d'un polynôme. — ***Le degré d'un polynôme réduit par rapport à une lettre (ou par rapport à plusieurs lettres) est le degré du monôme de plus haut degré par rapport à cette lettre (ou à ces lettres).***

Ainsi le polynôme $4x^6y^2 - 3x^4y^5 + 2xy^4$

est de degré 6 en x, de degré 5 en y et de degré 9 en x et y.

On voit que le degré d'un polynôme par rapport à deux ou plusieurs lettres n'est pas, en général, égal à la somme des degrés par rapport à chacune de ces lettres.

Un polynôme est homogène par rapport à plusieurs lettres lorsque tous les termes de ce polynôme sont du même degré par rapport à ces lettres.

$$2x^3 - 4xy^2 + 3x^2y$$

est un trinôme homogène du troisième degré en x et y.

90. Polynômes ordonnés. — 1° Considérons un polynôme *à une seule variable*, c'est-à-dire contenant une seule lettre :

$$3x^2 - 2x + 4 - 5x^3.$$

Il est naturel d'écrire les termes de ce polynôme de façon que leurs degrés aillent soit en augmentant soit en diminuant.

$$4 - 2x + 3x^2 - 5x^3 \qquad \text{ou} \qquad -5x^3 + 3x^2 - 2x + 4$$

Dans le premier cas *le polynôme est ordonné par rapport aux puissances croissantes de* x et dans le second cas *il est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de* x.

2° On ordonne par rapport à une des lettres *les polynômes à plusieurs variables* surtout lorsque cette lettre joue un rôle particulier.

Ainsi le polynôme $ax^2 + 3x + c - 2x^2 + 2bx - 5$

s'écrit : $ax^2 - 2x^2 + 2bx + 3x + c - 5$

et $(a - 2)x^2 + (2b + 3)\,x + c - 5.$

Lorsque a, b et c sont considérés comme des constantes, ce polynôme est un *trinôme du second degré* en x ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x. Le coefficient de x^2 est $(a - 2)$, celui de x est $(2b + 3)$ et le terme indépendant de x est $(c - 5)$.

3° Le polynôme $2x^3 - 3x^2y + 4xy^2 - y^3$

est un polynôme homogène du troisième degré en x et y ordonné simultanément par rapport aux puissances décroissantes de x et par rapport aux puissances croissantes de y.

91. Somme de plusieurs polynômes. — ***La somme de plusieurs polynômes est équivalente au polynôme formé par tous les termes de ces polynômes.***

En effet la somme

$$(a^2 + 5a - 7b) + (6a^2 + 3b - 2) + (-4a^2 + 5b - 3)$$

devient après suppression des parenthèses (n° 14)

$$a^2 + 5a - 7b + 6a^2 + 3b - 2 - 4a^2 + 5b - 3.$$

Nous pouvons ensuite réduire les termes semblables, ce qui donne :

$$3a^2 + 5a + b - 5.$$

92. Différence de deux polynômes. — ***Pour retrancher un polynôme il suffit d'ajouter le polynôme symétrique obtenu en changeant les signes de chacun de ses termes.***

Soit à effectuer : $(3a^2 + 6a - 7b) - (2a^2 - 4a + 3b)$

Supprimons les parenthèses (n° 10). Nous obtenons :

$$3a^2 + 6a - 7b - 2a^2 + 4a - 3b.$$

Ce résultat est équivalent à la somme :

$$(3a^2 + 6a - 7b) + (-2a^2 + 4a - 3b).$$

Une somme algébrique de plusieurs polynômes se ramène ainsi à une suite d'additions.

93. Somme algébrique de polynômes à une seule variable.

Il est bon dans ce cas d'ordonner ces polynômes, en les complétant par des points mis à la place des termes dont les degrés sont manquants. On peut alors les disposer, l'un au-dessous de l'autre, en faisant correspondre verticalement les termes semblables.

Exemple. — Soient les polynômes :

$A = 2 - 5x + 4x^3 \qquad B = 6 - 8x + 4x^2 \qquad C = x^2 - 2x^3 + 3 + 2x.$

Pour calculer la somme algébrique $S = A - B + C$, on écrit :

$$\begin{array}{rl} A = & 4x^3 \quad \bullet \quad - 5x + 2 \\ -B = & \quad \bullet \quad - 4x^2 + 8x - 6 \\ C = & -2x^3 + x^2 + 2x + 3 \\ \hline S = & 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1 \end{array}$$

La réduction des termes semblables est immédiate et on obtient un résultat ordonné.

EXERCICES

Calculer les valeurs numériques de :

92. $3a^2x^3 - 12ax - 8$ pour $a = +4$ et $x = -\frac{1}{2}$.

93. $\frac{x^3}{8} - \frac{8y^3}{27} + xy\left(\frac{2y}{3} - \frac{x}{2}\right)$ pour $x = +5$ et $y = +\frac{3}{4}$.

94. $\dfrac{\left(\frac{5a}{2}\right)^3 - \left(\frac{4b}{3}\right)^3}{\left(\frac{5}{2}a - \frac{4b}{3}\right)^2 + 10\,ab}$ pour $a = -\frac{2}{3}$ et $b = -2$.

95. $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ pour $a = 3$, $b = -53$ et $c = 34$.

96. $\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ pour $a = 39$, $b = 40$, $c = 25$ et $p = 52$.

97. Réduire le monôme : $4x^3(-3)y^3\left(-\frac{5}{6}\right)a^2x^3y^5$.

Calculer sa valeur pour $a = \frac{1}{2}$, $x = -4$ et $y = -\frac{3}{2}$

98. Soit le monôme : $3a^2\,(-4)\,x^3\left(\frac{1}{2}\right)ax^2y$.

1° Réduire ce monôme et donner son degré par rapport à a, b, x et y, puis son degré par rapport à l'ensemble des lettres.

2° Calculer sa valeur numérique pour : $a = -3$, $x = \frac{2}{3}$ et $y = -8$.

— Réduire et ordonner les polynômes suivants :

99. $\frac{3x^2}{2} - \frac{5}{4}x + 2x^3 - 5 + \frac{x}{4} - \frac{4x^2}{8} - x^3$.

100. $4x^2 - \frac{7}{2} + \frac{2}{5}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - 3 + \frac{3}{2}x^3 + 5 - 3x$.

101. $\frac{2}{5}ab^2 + 3b^2 - 4a^2b + \frac{5}{2}ab^2 + \frac{3}{2}a^3 - a^2 + 2a^2b$.

102. $2x^2 - x^3 + cx + 4 + ax^3 - 3x + bx^2$.

103. Soient les polynômes :

$A = x^2 + 2x + 3 \qquad B = 2x^2 + 3x - 1 \qquad C = 3x^2 - 5x + 4$.

Former les polynômes :

$A + B + C$, $B + C - A$, $C + A - B$ et $A + B - C$.

104. Soient les polynômes :

$A = 4a^2 - 5ab + 3b^2 \qquad B = 3a^2 + 2ab + b^2 \qquad C = -a^2 + 3ab + 2b^2$.

Former les polynômes : $A - B - C$, $B - C - A$ et $C - A - B$.

105. On considère les polynômes :

$P = x^4 + 2x^2 + 1 \qquad Q = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1$.

$R = 2x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4x + 2 \qquad S = -4x^3 + 4x$.

Former les polynômes :

$(P + Q) - (R + S)$, $(P - Q) + (R - S)$ et $(P - Q) - (R - S)$.

SIXIÈME LEÇON

MULTIPLICATION DES MONÔMES ET DES POLYNÔMES

94. Produit de deux monômes. — Soit à effectuer le produit des deux monômes :

$$\left(\frac{3}{5}\ ax^3y^2\right) \times (-2a^4x^5).$$

Pour multiplier deux produits, il suffit (n° 15) de former le produit unique contenant tous les facteurs des deux produits. Nous obtenons :

$$\frac{3}{5}\ a.x^3y^2.(-2).a^4.x^5. = \left(\frac{3}{5}\right)(-2)a^{1+4}\,x^{3+5}\,y^2.$$

Soit en réduisant : $-\ \frac{6}{5}\ a^5x^8y^2$.

Le produit de deux monômes est un monôme dont :

1° *le coefficient est le produit des coefficients de chacun des facteurs;*

2° *la partie littérale est formée des lettres contenues dans les deux monômes, chacune d'elles ayant pour exposant la somme de ses exposants dans les deux facteurs.*

Cette règle s'étend au produit de plusieurs monômes et permet de calculer le carré ou le cube d'un monôme.

EXEMPLES :

1° $\left(\frac{3}{4}\ a^2x^3y\right)\left(-\frac{2}{5}\ ay^4\right)(2x^5y^2) = -\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times 2a^{2+1}x^{3+5}y^{1+4+2}$

$$= -\frac{3}{5}\,a^3x^8y^7.$$

2° $\left(-\frac{2}{3}ax^4y^2\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}ax^4y^2\right)\left(-\frac{2}{3}ax^4y^2\right) = \frac{4}{9}a^2x^8y^4.$

3° $(5a^2x^3)^3 = (5a^2x^3)(5a^2x^3)(5a^2x^3) = 125a^6x^9.$

95. Produit d'un polynôme par un monôme. — Nous avons à multiplier une somme par un nombre. Nous pouvons donc multiplier chaque terme de la somme par le nombre et faire la somme des produits obtenus (n° 14). Ainsi :

$$(a^2x^3 - 5x + 3a)(-2a^3x) = -2a^5x^4 + 10a^3x^2 - 6a^4x.$$

96. Produit de deux polynômes. — Nous avons à multiplier deux sommes. Nous pouvons donc multiplier chaque terme de l'une par chaque terme de l'autre et faire la somme des produits obtenus (n° 15). Ainsi :

$$(3x^2 - 2x + y)(4x - 5y) = 12x^3 - 8x^2 + 4xy - 15x^2y + 10xy - 5y^2$$
$$= 12x^3 - 15x^2y - 8x^2 + 14xy - 5y^2.$$

97. Produit de deux polynômes à une variable. — Soit à effectuer le produit des deux polynômes :

$$A = 3x^3 - 2 + 5x \quad \text{et} \quad B = 2x^2 - 4x + 3.$$

Dans ce cas il est commode d'écrire les deux polynômes l'un au-dessous de l'autre en les ordonnant et en les complétant s'il y a lieu. On effectue les produits partiels du premier par chacun des termes du deuxième en disposant les résultats comme pour l'addition (n° 93).

A =	$3x^3$	•	$+ 5x$	$- 2$		
B =		$2x^2$	$- 4x$	$+ 3$		
$A \times 2x^2$ =	$6x^5$	•	$+ 10x^3$	$- 4x^2$		
$A \times (-4x)$ =		$- 12x^4$	•	$- 20x^2$	$+ 8x$	
$A \times 3$ =			$+ 9x^3$	•	$+ 15x$	$- 6$
A.B =	$6x^5$	$- 12x^4$	$+ 19x^3$	$- 24x^2$	$+ 23x$	$- 6$

On obtient directement le résultat réduit et ordonné.

REMARQUE. — Le terme de plus haut degré du produit est le produit des termes de plus haut degré de chaque facteur. Le terme de plus faible degré est de même, le produit des termes de plus faible degré. Ces deux termes n'ayant pas de terme semblable subsistent après la réduction, ce qui permet d'affirmer que :

1° *Le produit de deux polynômes est un polynôme.*

2° *Le degré du produit est la somme des degrés de chacun des facteurs.*

98. Produit de plusieurs polynômes. — Pour faire le produit de plusieurs polynômes, on effectue le produit des deux premiers, puis on multi-

plie le résultat par le troisième et ainsi de suite jusqu'à épuisement de tous les facteurs.

On peut d'ailleurs *modifier l'ordre des facteurs* et *remplacer deux ou plusieurs d'entre eux par leur produit effectué*. Quelle que soit la méthode suivie les résultats sont des polynômes équivalents, d'après le n° 14. On démontre qu'ils sont *identiques*, c'est-à-dire formés, après réduction, des mêmes termes, ce qu'il est possible de vérifier sur des exemples. D'autre part la remarque du numéro précédent s'étend à un produit de plusieurs polynômes :

Le produit de plusieurs polynômes est un polynôme unique dont le degré est la somme des degrés de chacun des facteurs.

IDENTITÉS REMARQUABLES

99. Définition. — ***Une identité est l'égalité de deux expressions algébriques équivalentes.*** Une identité est donc vérifiée quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux lettres qui y figurent. Ces lettres pourront d'ailleurs représenter indifféremment des nombres ou des expressions algébriques.

100. Carré de la somme ou de la différence de deux termes. — Soit à calculer $(a+b)^2$:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2.$$

Donc :

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \qquad (1)$$

En changeant b en $-b$ on obtient :

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \qquad (2)$$

Applications : 1° $(3x+5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$.

2° $\left(3x^2 - \frac{2}{5}y^3\right)^2 = 9x^4 - \frac{12}{5}x^2y^3 + \frac{4}{25}y^6$.

101. Produit de la somme de deux termes par leur différence.

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ba - b^2.$$

Donc :

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2} \qquad (3)$$

Exemples : 1° $(2x+3)(2x-3) = 4x^2 - 9$.

2° $\left(\frac{2}{3}x^2 - 4y\right)\left(\frac{2}{3}x^2 + 4y\right) = \frac{4}{9}x^4 - 16y^2$.

3° $(a + b - c)(a - b + c) = a^2 - (b - c)^2$.

102. Carré d'une somme de plusieurs termes. — Soit à calculer $(a + b + c)^2$

$(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c) = (a^2 + ab + ac) + (ba + b^2 + bc) + (ca + cb + c^2)$.

Soit :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \qquad (4)$$

Cette formule se généralise pour quatre termes ou plus :

Le carré d'une somme comprend :

1° *la somme des carrés de chaque terme;*

2° *la somme des doubles produits des termes pris deux à deux.*

On écrit symboliquement :

$$(a + b + c + d)^2 = \Sigma a^2 + \Sigma 2ab \qquad (5)$$

Σa^2 se lit « sigma de a^2 » et représente la somme de tous les carrés tels que a^2.

$\Sigma 2ab$ représente de même la somme de tous les doubles produits analogues à $2ab$. Afin de ne pas en oublier on associe chaque terme de la somme à chacun des termes suivants.

EXEMPLES : 1° $(2x - 3y + 5z)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy + 20xz - 30yz$.
2° $(a - b + c - d)^2 =$
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd$.

103. Cube d'une somme ou d'une différence de deux termes.

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3.$$

D'où :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (6)$$

En changeant b en $-b$ on obtient :

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad (7)$$

EXEMPLES : 1° $(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.
2° $(2x + 5y)^3 = 8x^3 + 60x^2y + 150xy^2 + 125y^3$.

104. Somme et différence de deux cubes. — La formule (3) peut s'écrire :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Elle se généralise de la façon suivante. Nous avons :

$$(a^2 + ab + b^2)(a - b) = \left| \begin{array}{l} a^3 + a^2b + ab^2 \\ \quad - a^2b - ab^2 - b^3 \end{array} \right| = a^3 - b^3$$

D'où :

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)} \qquad (8)$$

et en changeant b en $-b$:

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)} \qquad (9)$$

105. Généralisation. — On démontrerait de même que :

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

et d'une façon générale quel que soit l'entier n :

$$\boxed{a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})} \qquad (10)$$

106. Autres identités. — Les identités précédentes sont d'un emploi courant en calcul algébrique. Il importe donc de pouvoir les utiliser sans hésitation. Les suivantes, moins importantes, pourront être vérifiées à titre d'exercice.

1° $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

2° $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

3° $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

4° $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

5° $(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$

6° $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2 = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$

7° $(a + b + c)^3 = \Sigma a^3 + \Sigma 3a^2b + 6abc$

8° $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(b + c)(c + a)(a + b)$

9° $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab).$

EXERCICES

— Effectuer les produits suivants .

106. $\left(\frac{3}{5} a^2b^2x\right)\left(\frac{2}{3} a^3b^4y^2\right)$

107. $\left(\frac{3}{5} a^3x^5\right)\left(-\frac{4}{3} ax^2y\right)\left(\frac{5}{2} ax^2y\right)$

108. $\left(-\frac{7}{2} a^2b^3x\right)^2$

109. $\left(\frac{3}{2} a^2b^4 - \frac{5}{4} ab^3 + 3a^2\right)\left(-\frac{4}{3} a^2b^3\right)$

110. $(4ab^2x^7y^5)^3$

111. $(4a^2x^4 - 15ax^2 + 10a^3)(3a^2x^3).$

112. $(5x + 6y - 4)(5x - 6y)$ **113.** $(2a^4b - 3a^3b^2 + 4b^3)(2a^3 + 3b)$.

— Effectuer les produits suivants, réduire et ordonner les résultats.

114. $(6x^2 + 4x^3 + 9x)(2x - 3)$ **115.** $(x^2 + 9)(2x + 6)(3 - x)$.

116. $(x^3 + 1 - 3x - 3x^2)(x + 1)$ **117.** $(12x + 3)(2x - 1)^2$.

118. $(5 - x^3 + 3x^2 - 2x)^2$ **119.** $(4x^2 + 1)(3 - 6x)(2x + 1)$.

120. $(4x^2 - 3x + 2)^3$ **121.** $(2x^3 - 1 + 3x)(x^2 - 5 + 2x)$.

— Vérifier les identités suivantes :

122. $(a + b)^3 + 2(a^3 + b^3) = 3(a + b)(a^2 + b^2)$.

123. $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 = 3(b - c)(c - a)(a - b)$.

124. $(a + b + c)(bc + ca + ab) = (b + c)(c + a)(a + b) + abc$.

125. $(ax + mby)^2 - m(ay + bx)^2 = (a^2 - mb^2)(x^2 - my^2)$.

126. $(a^2 + mb^2)^2 - 4ma^2b^2 = (a^2 - mb^2)^2$.

127. $(a^3 + 3mab^2)^2 - m(3a^2b + mb^3)^2 = (a^2 - mb^2)^3$.

128. $(ax + by + cz)^2 + (bx - ay)^2 + (cy - bz)^2 + (az - cx)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$.

129. $(ab + bc + ca)^2 + (a^2 - bc)^2 + (b^2 - ca)^2 + (c^2 - ab)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2$.

130. $(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3 = 24abc$.

131. $(a + b + c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 + (a + b - c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$.

132. $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) + (b - c)(c - a)(a - b) = 0$.

133. $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) + (a + b + c)(b - c)(c - a)(a - b) = 0$.

134. *Triangle de Pascal.* — On calcule les puissances successives de $(a + b)$ et on établit le tableau des coefficients des résultats ordonnés :

	Coefficients :
$(a + b)^1 = a + b$	1 1
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1
. . . .	. . . .

Montrer que chaque coefficient du tableau triangulaire obtenu est égal à la somme de celui qui est placé au-dessus de lui et de celui qui est placé à la gauche de ce dernier. En déduire les lignes suivantes du tableau et établir les identités donnant $(a + b)^5$; $(a + b)^6$...

— Calculer les expressions suivantes :

135. $(2x + 3y)^2 - (2x - 3y)^2 - 2(6xy)$.

136. $(x + y)(x + 1)(y + 1) - x(y + 1)^2 - y(x + 1)^2$.

137. $(3x - 2y + 1)(6xy - 3x + 2y) - (3x - 2y)(3x + 1)(2y - 1)$.

138. $(x + 2y + 3z)(2y + 3z - x)(3z + x - 2y)(x + 2y - 3z) + (4y^2 + 9z^2 - x^2)^2$.

139. $(2x + 3y + z)^2 + (3y + z - x)^2 + (z + 2x - 3y)^2 + (2x + 3y - z)^2$.

140. $(5x - 3y + 2z)^3 + 3(5x - 3y)(5x + 2z)(3y - 2z)$.

141. $(7a + 5b + 4c)^2 + (4b - 5c)^2 + (7c - 4a)^2 + (5a - 7b)^2$.

142. $(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)$.

143. $(a - b + c)^3 + (a + b - c)^3 + 4a(a^2 + 3bc)$.

144. $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2)$.

145. $(2x + 4y - z)^2 - (x - y + 4z)^2 - 2(x + y + z)(x + 7y - 7z)$.

146. Former le carré du polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Peut-on déterminer a, b, c et d de façon à obtenir :

$$9x^6 - 24x^5 + 46x^4 - 52x^3 + 41x^2 - 20x + 4.$$

147. Soit $P = a + b + c + d$, $Q = a + b - c - d$, $R = a - b + c - d$ et $S = a - b - c + d$.

Calculer l'expression $PQ(P^2 + Q^2) - RS(R^2 + S^2)$.

148. On pose $a + b = S$ et $ab = P$.

1° Calculer en fonction de S et de P les expressions $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$ et $a^4 + b^4$.

2° Calculer pour $S = 1$ l'expression $6(a^2 + b^2)^2 - 3(a^4 + b^4) - 2(a^3 + b^3)^2$.

149. On suppose $A = (x - y)^2$, $B = 4xy$, $C = -(x + y)^2$.

Vérifier les identités : 1° $A + B + C = 0$.

2° $A^2 - BC = B^2 - CA = C^2 - AB$ 3° $A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$.

Montrer que la première d'entre elles entraine les suivantes.

150. On prend sur un axe d'origine O, les points A, B, C et M d'abscisses a, b, c et x.

1° Démontrer la relation $\overline{OA}^2 . \overline{BC} + \overline{OB}^2 . \overline{CA} + \overline{OC}^2 . \overline{AB} = - \overline{BC} . \overline{CA} . \overline{AB}$.

2° En déduire une relation analogue en remplaçant O par M et la valeur en fonction de a, b, et c de l'expression :

$$(x - a)^2 (b - c) + (x - b)^2 (c - a) + (x - c)^2 (a - b).$$

151. Les données étant les mêmes qu'à l'exercice précédent :

1° Démontrer la relation :

$$\overline{OA}^3 . \overline{BC} + \overline{OB}^3 . \overline{CA} + \overline{OC}^3 . \overline{AB} = - \overline{BC} . \overline{CA} . \overline{AB} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}).$$

2° Utiliser la relation analogue en remplaçant O par M pour calculer l'expression : $(x - a)^3 (b - c) + (x - b)^3 (c - a) + (x - c)^3 (a - b)$.

152. On désigne par p la demi-somme des trois nombres a, b et c. Démontrer que :

1° $p^2 + (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

2° $16p(p - a)(p - b)(p - c) = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$.

153. Soient : $x = 7a + 3b + 6c$, $y = 6a + 2b + 6c$ et $z = 3a + 3b + 2c$.

1° Calculer l'expression $y^2 + z^2 - x^2$.

2° Montrer que si a, b, c sont les côtés d'un triangle rectangle (d'hypoténuse a) il en est de même de x, y et z.

154. Reprendre l'exercice précédent pour :

$x = 9a + 4b + 8c$, $y = 4a + b + 4c$, $z = 8a + 4b + 7c$.

155. Montrer que lorsque a, b et c satisfont aux relations suivantes, le triangle de côtés a, b et c est rectangle :

1° $a = x^2 + y^2$ $b = x^2 - y^2$ $c = 2xy$.

2° $a = 5(2x^2 + 2xy + y^2)$ $b = 8x^2 + 2xy - 3y^2$ $c = 6x^2 + 14xy + 4y^2$.

156. 1° Démontrer les relations

a) $(Ax + By)^2 + (Ay - Bx)^2 = (A^2 + B^2)(x^2 + y^2)$.

b) $(Ax + By)^2 - (Ay + Bx)^2 = (A^2 - B^2)(x^2 - y^2)$.

2° En déduire les identités suivantes :

a) $[(a^2 - b^2)x + 2aby]^2 + [(a^2 - b^2)y - 2abx]^2 = (a^2 + b^2)^2(x^2 + y^2)$.

b) $[(a^2 + b^2)x + 2aby]^2 - [(a^2 + b^2)y + 2abx]^2 = (a^2 - b^2)^2(x^2 - y^2)$.

c) $[(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)y]^2 - [(a^2 + b^2)y + (a^2 - b^2)x]^2 = 4a^2b^2(x^2 - y^2)$.

SEPTIÈME LEÇON

DIVISION DES MONÔMES ET DES POLYNÔMES

107. Définitions. — Le quotient exact de deux monômes ou polynômes A et B s'indique par *l'expression* $\frac{A}{B}$ *appelée fraction rationnelle.*

Lorsqu'une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ se réduit à un monôme ou à un polynôme on dit que *le polynôme (ou monôme)* A *est divisible par le polynôme (ou monôme)* B.

108. Division d'un monôme par un monôme.

L'égalité $$3a^4x^3y = (2a^3xy)\left(\frac{3}{2}\,ax^2\right)$$

montre que le quotient de $3a^4x^3y$ par $2a^3xy$ est le monôme $\frac{3}{2}\,ax^2$.

Nous pouvons écrire : $$\frac{3a^4x^3y}{2a^3xy} = \frac{3}{2}ax^2.$$

De la règle de la multiplication des monômes (n° 94) il résulte que :

Lorsqu'un monôme A *est divisible par un monôme* B :

1° ***Le quotient est un monôme dont le coefficient est égal au quotient du coefficient du dividende par celui du diviseur.***

2° ***L'exposant d'une lettre dans le quotient est égal à son exposant dans le dividende diminué de son exposant dans le diviseur.***

Exemple :

$$\frac{-\frac{3}{2}\,a^3x^5y^4}{\frac{5}{4}\,a^3x^2} = -\frac{3}{2}\times\frac{4}{5}\;a^{3-3}.x^{5-2}.y^4 = -\frac{6}{5}\,x^3y^4.$$

Si les exposants d'une lettre sont égaux au dividende et au diviseur, cette lettre ne figure pas au quotient. Si une lettre du dividende ne figure pas au diviseur elle conserve son exposant. Nous voyons d'autre part apparaître la condition :

109. ***Pour qu'un monôme* A *soit divisible par un monôme* B *il faut et il suffit que le monôme* A *contienne toutes les lettres de* B *avec des exposants au moins égaux.***

Ainsi le quotient : $\dfrac{2a^4x^2y}{3axy^3} = \dfrac{2a^3x}{3y^2}$

ne se réduit pas à un monôme.

Remarque. — Toutefois avec la convention des exposants négatifs (n° 33) la règle du n° 108 peut s'appliquer à tous les quotients de monômes et on peut écrire :

$$\frac{2a^4x^2y}{3axy^3} = \frac{2}{3}\,a^{4-1}.x^{2-1}.y^{1-3} = \frac{2}{3}\,a^3xy^{-2}$$

mais le résultat n'est pas un monôme, car d'après la définition (n° 84) les exposants des lettres d'un monôme sont des nombres positifs.

110. Division d'un polynôme par un monôme. — Nous avons à diviser une somme par un nombre. Nous pouvons donc diviser chaque terme de la somme par le nombre et faire la somme des résultats (n° 19).

Ainsi :

$$\frac{6a^3x^2y - 5a^3x^4 + 2a^4x^2y}{2a^3x^2} = 3y - \frac{5}{2}\,x^2 + ay.$$

Le quotient est un polynôme car tous les termes du dividende sont divisibles par le diviseur. D'où la condition :

Pour qu'un polynôme soit divisible par un monôme, il faut et il suffit que tous ses termes soient divisibles par ce monôme.

Remarque. — L'égalité :

$$6x^3 + 3x^2 + 8x + 4 = (2x + 1)(3x^2 + 4)$$

montre que

$$\frac{6x^3 + 3x^2 + 8x + 4}{2x + 1} = 3x^2 + 4.$$

Nous voyons que le quotient exact de deux polynômes est parfois un polynôme ou un monôme.

DÉCOMPOSITION EN FACTEURS

111. Définition. — ***Décomposer un polynôme en facteurs, c'est le mettre sous forme d'un produit de facteurs*** *(monômes et polynômes).*

Comme le degré du polynôme est la somme des degrés de chacun des facteurs le nombre de ceux-ci est toujours limité.

112. Mise en facteur d'un monôme dans un polynôme. — Soit le polynôme

$$a^3x^2y - \frac{5}{2}a^3x^4 + \frac{2}{3}a^4x^2y.$$

Tous les termes sont divisibles par le monôme a^2x. Nous pouvons donc écrire :

$$a^3x^2y - \frac{5}{2}a^3x^4 + \frac{2}{3}a^4x^2y = a^2x\left(axy - \frac{5}{2}ax^3 + \frac{2}{3}a^2xy\right).$$

On dit que *le monôme a^2x a été mis en facteur commun* dans le polynôme. Tout monôme mis en facteur commun doit être un diviseur de chacun des termes du polynôme; il en résulte que :

Le monôme de plus haut degré pouvant être mis en facteur dans un polynôme est formé des lettres communes à tous les termes du polynôme, chacune d'elles étant affectée de son plus petit exposant.

Le coefficient de ce monôme est arbitraire. On peut, par exemple, s'arranger pour faire disparaître les dénominateurs à l'intérieur des parenthèses. Ainsi dans le polynôme précédent, nous pouvons mettre en facteur $\frac{1}{6}a^3x^2$. Nous obtenons :

$$a^3x^2y - \frac{5}{2}a^3x^4 + \frac{2}{3}a^4x^2y = \frac{1}{6}a^3x^2(6y - 15x^2 + 4ay).$$

113. Autres procédés de décomposition. — Après avoir, dans un polynôme, mis en facteur le monôme de plus haut degré possible, on pourra essayer l'un des procédés suivants de décomposition.

114. Groupement des termes deux à deux. — Ce procédé s'applique aux polynômes de quatre ou six termes que l'on essaye de ramener à un produit d'un binôme par un binôme ou un trinôme

1° $ax + by + ay + bx = ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$
$= (a + b)(x + y).$

2° $x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - ax - bx + ab = x(x - a) - b(x - a)$
$= (x - a)(x - b).$

3° $ax + by + a - bx - ay - b = x(a - b) + y(b - a) + a - b =$
$= (a - b)(x - y + 1).$

115. Carré ou cube d'un binôme. — On voit immédiatement que :

1° $x^2 - 14x + 49 = x^2 - 2.7.x + 7^2 = (x - 7)^2.$

2° $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3.2.x^2 + 3.2^2.x + 2^3 = (x + 2)^3.$

116. Différence de deux carrés. — L'un des procédés les plus féconds consiste à ramener l'expression à décomposer à la forme $A^2 - B^2$ qui est égale au produit $(A + B)(A - B)$. Ainsi :

1° $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x + 5)(x - 5).$

2° $9a^2x^4 - 4b^2 = (3ax^2)^2 - (2b)^2 = (3ax^2 + 2b)(3ax^2 - 2b).$

3° $x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 9 + 8 = (x - 3)^2 - 1^2$
$= (x - 3 + 1)(x - 3 - 1) = (x - 2)(x - 4).$

4° $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab = (a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c).$

5° $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2$
$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$

117. Généralisation. — On peut utiliser également les identités :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

et d'une façon générale

$$(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1}).$$

EXEMPLES : 1° $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4).$

2° $x^3 + 1 = x^3 + 1^3 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$

3° $x^5 - a^5 = (x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4).$

118. Application. — Soit à décomposer le polynôme

$$P = x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$$

Ce polynôme prend pour $x = 2$ la valeur zéro. On vérifie que :

$$0 = 2^3 + 2.2^2 - 5.2 - 6.$$

Retranchons terme à terme les deux égalités précédentes, nous obtenons :

$$P = (x^3 - 2^3) + 2(x^2 - 2^2) - 5(x - 2).$$

Sous cette forme, on voit que P est égal à une somme de termes tous divisibles par $x - 2$. On peut écrire :

$$P = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + 2(x - 2)(x + 2) - 5(x - 2)$$
$$= (x - 2)[x^2 + 2x + 4 + 2(x + 2) - 5].$$

Soit : $P = (x - 2)(x^2 + 4x + 3).$

Autrement dit, le polynôme P qui s'annule pour $x = 2$ est divisible par $x - 2$.

Plus généralement : ***Lorsqu'un polynôme s'annule pour $x = a$ il est divisible par $x - a$.***

— On peut utiliser à nouveau cette propriété en remarquant que P s'annule pour $x = -1$. Comme $x - 2$ n'est pas nul pour cette valeur de x, c'est $x^2 + 4x + 3$ qui est égal à 0 (n° 13). On obtient de même :

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3).$$

D'où finalement : $$P = (x - 2)(x + 1)(x + 3).$$

EXERCICES

— Calculer les quotients de .

157. $\frac{3}{5} a^5x^7y^3$ par $\frac{4}{5} a^3x^2y$

158. $-\frac{12}{25} a^4b^3x^2$ par $\frac{4}{5} a^4bx^2$.

159. $\frac{10}{7} a^3b^5x^4y^2$ par $-\frac{2}{21} a^3x^2y$

160. $-\frac{9}{20} a^7b^3x^6y^4$ par $-\frac{3}{5} a^3bx^4y^3$.

161. $15x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 3x^2$ par $3x^2$.

162. $\frac{15}{2} a^2b^3x^4 - \frac{10}{3} a^2b^2x^6 + 5a^2bx^3$ par $\frac{5}{6} a^2bx^2$.

163. $\frac{3}{5} x^3y^4z^2 - \frac{21}{4} x^2y^5z + \frac{9}{10} x^4y^2z^3$ par $\frac{3}{20} x^2y^2z$.

— Mettre en facteur le monôme de plus haut degré possible dans les polynômes :

164. $15a^4x^3y^2 - 12a^2x^4y^3 + 21a^3x^3y^5 - 9a^2x^3y^5$.

165. $5a^2b^4x^4 + 15ab^3x^4 - 10a^3b^3x^3 + 25a^4b^3x^3$.

166. $\frac{6}{5} a^2b^6x^3y^3 - \frac{7}{10} a^2b^5x^4y^4 + \frac{4}{15} a^4b^4y^7 - \frac{5}{6} a^2b^2x^2y^5$.

— Décomposer en produit de deux facteurs :

167. $ax - by + ay - bx$

168. $x^2 - (a + b)xy + aby^2$.

169. $a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1)$

170. $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)$.

171. $(xy + ab)^2 + (ay - bx)^2$

172. $(ax - mby)^2 + m(ay + bx)^2$

173. $64x^4 - 49y^2$

174. $25a^4x^2 - 16b^2y^4$.

175. $x^2 - 14x + 33$

176. $x^4 - 3x^2 + 1$.

177. $125x^3 - 27y^3$

178. $(3x + 7)^2 - (2x + 9)^2$.

179. $64a^3x^6 + b^3y^9$

180. $(2x + 3y)^2 - 4(2x + 3y)$.

— Décomposer en produit de trois ou quatre facteurs .

181. $x^4 - 1$

182. $a^2(x^2 + b^4) - b^2(x^2 + a^4)$.

183. $16x^4 - 81y^4$

184. $(xy - 1)^2 - (x - y)^2$.

185. $x^4 - 5x^2 + 4$

186. $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2$.

187. $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$

188. $(a^2x^2 + b^2y^2) - (b^2x^2 + a^2y^2)$.

189. $(a^2 + b^2 - 5)^2 - 4(ab + 2)^2$

190. $(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2$.

191. Mettre $x^4 + 4$ sous forme d'un produit de deux facteurs du second degré (Ajouter et retrancher $4x^2$).

Application : Mettre $x^8 - 16$ sous forme d'un produit de quatre facteurs du second degré.

192. 1° Calculer les expressions

$$A = 90(a^2 + b^2 + c^2) - (7a + 5b - 4c)^2 - (4b + 5c)^2 - (4a + 7c)^2.$$

$$B = (5a + 3b - 8c)^2 - 80(a^2 - b^2 + c^2) - (8b - 3c)^2 + (8a + 5c)^2.$$

2° Montrer que A et B sont les carrés de deux binômes.

3° Calculer la différence A — B et la mettre sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.

194. On considère l'expression :

$$A = (x + y + z)^3 - (y + z - x)^3 - (z + x - y)^3 - (x + y - z)^3.$$

1° Montrer que A est nulle pour $x = 0$, quels que soient y et z et de même pour $y = 0$ et pour $z = 0$. En déduire que $A = mxyz$, dans laquelle m est un facteur numérique que l'on calculera en faisant $x = y = z = 1$.

2° Vérifier le résultat obtenu en appliquant la formule :

$$(a + b + c)^3 = \Sigma a^3 + \Sigma 3a^2b + 6abc.$$

195. Calculer pour $x = 5$ la valeur numérique du polynôme

$$2x^2 - 7x - 15$$

et le décomposer en un produit de facteurs du 1[er] degré.

— Reprendre l'exercice précédent pour :

196. $3x^2 - 13x + 4$ pour $x = 4$.

197. $2x^3 + 7x^2 + 3x$ pour $x = -3$.

198. $4x^3 - 28x^2 - 25x + 175$ pour $x = 7$.

199. Soit le polynôme $A = 2x^3 - 7x^2 - 3x + 18$.

1° Calculer sa valeur pour $x = 2$ et pour $x = 3$.

2° En déduire que $A = (ax + b)(x - 2)(x - 3)$, a et b étant des coefficients que l'on calculera.

200. Montrer que l'on peut mettre $b - c$ en facteur dans l'expression

$$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$$

et achever la décomposition en un produit de 3 facteurs du 1[er] degré.

201. Montrer que l'expression : $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$ s'annule pour $a = b$, $b = c$, $c = a$ et $a = -(b + c)$. En déduire qu'elle peut s'écrire sous la forme $m(a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a)$ dans laquelle m est un coefficient que l'on déterminera en faisant $a = 2$, $b = 1$ et $c = 0$.

HUITIÈME LEÇON

I. FRACTIONS RATIONNELLES

119. Définition. — ***On appelle fraction rationnelle toute fraction dont les termes sont des monômes ou des polynômes.***

EXEMPLES : $\frac{2a}{bx^2}$ $\frac{3ax}{2x+b}$ $\frac{2x+5}{3x^2-5x}$.

La valeur numérique d'une fraction rationnelle est le quotient exact de la valeur du numérateur par celle du dénominateur. Par suite on ne peut calculer cette valeur lorsque le dénominateur est nul. Ainsi la fraction : $\frac{2x}{x-5}$ n'a pas de sens pour $x = 5$. On dit qu'elle n'est pas *définie* pour $x = 5$.

Dans ce qui suit nous ne considérerons que les valeurs des lettres pour lesquelles les fractions envisagées sont définies. Nous allons montrer comment les règles de calcul relatives aux fractions numériques se généralisent pour les fractions rationnelles.

120. Propriété fondamentale. — ***Lorsqu'on multiplie ou lorsque l'on divise les deux termes d'une fraction rationnelle par une même expression algébrique, on obtient une fraction rationnelle équivalente.***

En effet, d'après la propriété analogue des fractions numériques, la valeur numérique de la fraction ne change pas.

1° $\frac{2x}{x-2} = \frac{2x(x-3)}{(x-2)(x-3)}$

2° $\frac{x^2}{x^2-5x} = \frac{x^2}{x(x-5)} = \frac{x}{x-5}$.

121. Simplification d'une fraction rationnelle. — Pour simplifier une fraction ordinaire on divise ses deux termes par un diviseur commun. On opère de même pour une fraction rationnelle. Afin d'apercevoir les facteurs communs aux deux termes, il faut donc commencer par décomposer ces termes en facteurs.

EXEMPLES :

1° $\frac{144}{252} = \frac{2^4.3^2}{2^2.3^2.7} = \frac{2^2 \times 2^2.3^2}{7 \times 2^2.3^2} = \frac{2^2}{7} = \frac{4}{7}.$

2° $\frac{2a^3xy^2}{3x^3y^2} = \frac{2a^3 \times xy^2}{3x^2 \times xy^2} = \frac{2a^3}{3x^2}.$

3° $\frac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4} = \frac{3x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{3x}{x+2}.$

4° $\frac{x^3 - 1}{3x - 3} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{3(x-1)} = \frac{x^2+x+1}{3} = \frac{x^2}{3} + \frac{x}{3} + \frac{1}{3}.$

On voit, d'après le dernier exemple, qu'une fraction rationnelle peut se réduire à un polynôme.

122. Réduction au même dénominateur. — Lorsqu'il s'agit de fractions ordinaires, ou de fractions à dénominateurs numériques, il suffit de prendre pour dénominateur un multiple commun à tous les dénominateurs. On prend de préférence leur plus petit commun multiple (P. P. C. M.). On procède d'une façon analogue pour les fractions rationnelles.

EXEMPLES :

1° $\frac{5}{56}$, $\frac{4x}{21}$ et $\frac{3x-1}{12}.$

Soit : $\frac{5}{2^3 \cdot 7}$, $\frac{4x}{3 \cdot 7}$ et $\frac{3x-1}{2^2 \cdot 3}.$

Le P. P. C. M. des dénominateurs est : $2^3.3.7 = 168.$

On obtient : $\frac{15}{168}$ $\frac{32x}{168}$ et $\frac{14(3x-1)}{168}$

2° $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$, $\frac{3x+3}{x^3 + 2x^2 + x}$ et $\frac{2x}{x^3}$

Simplifions d'abord ces fractions

$\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$, $\frac{3(x+1)}{x(x+1)^2}$ et $\frac{2x}{x^3}$

Soit $\frac{x}{x+1}$, $\frac{3}{x(x+1)}$ et $\frac{2}{x^2}.$

Nous pouvons prendre pour dénominateur commun le produit $x^2(x+1)$.

Nous obtenons :

$$\frac{x^3}{x^2(x+1)}, \quad \frac{3x}{x^2(x+1)} \quad \text{et} \quad \frac{2(x+1)}{x^2(x+1)}.$$

Il y a avantage à obtenir ainsi le dénominateur de plus faible degré possible.

123. Somme algébrique de fractions rationnelles. — La somme algébrique de plusieurs fractions rationnelles de même dénominateur s'obtient, comme pour les fractions ordinaires, en formant la fraction qui a pour numérateur la somme algébrique des numérateurs et pour dénominateur le dénominateur commun. Il est souvent avantageux d'opérer avec des termes mis sous forme de produits de facteurs de façon à apercevoir toutes les simplifications possibles.

La marche à suivre dans le cas le plus général est la suivante :

1° Décomposer en facteurs les termes des fractions.

2° Simplifier si possible ces fractions.

3° Les réduire au même dénominateur.

4° Faire la somme algébrique des numérateurs en conservant le dénominateur commun.

5° Simplifier si possible le résultat.

EXEMPLE. — *Soit à effectuer :*

$$\frac{2x^3 - x^2}{x^4 + x^3} - \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} + \frac{x-1}{x^2-1}.$$

On obtient successivement :

$$\frac{x^2(2x-1)}{x^3(x+1)} - \frac{(x-1)^2}{x(x-1)} + \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x-1}{x(x+1)} - \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x+1} =$$

$$\frac{2x-1}{x(x+1)} - \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} = \frac{2x-1-(x^2-1)+x}{x(x+1)} =$$

$$\frac{2x-1-x^2+1+x}{x(x+1)} = \frac{3x-x^2}{x(x+1)} = \frac{x(3-x)}{x(x+1)} = \frac{3-x}{x+1}.$$

124. Multiplication et division des fractions rationnelles. — Pour multiplier des fractions rationnelles, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. Pour diviser deux fractions rationnelles, on multiplie la fraction dividende par l'inverse de la fraction diviseur.

Ces règles sont les conséquences des règles des opérations analogues sur les fractions ordinaires. Avant d'effectuer, ne pas oublier de simplifier, si possible, les résultats.

EXEMPLES :

1° $$\frac{a}{2} \times \frac{a+1}{6} \times \frac{4a}{a^2-1} = \frac{a(a+1) \times 4a}{2 \times 6(a^2-1)} = \frac{a^2}{3(a-1)}.$$

2° $$\frac{x}{x^2-1} \times \frac{x^2-x}{x^2} \times \frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{x(x^2-x)(2x+1)}{(x^2-1).\, x^2(x^2+1)} =$$

$$\frac{x^2\,(x-1)(2x+1)}{x^2(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{2x+1}{x\,(x+1)(x^2+1)}$$

3° $$\frac{a^2}{a^2-1} : \frac{a+2}{a-1} = \frac{a^2}{a^2-1} \times \frac{a-1}{a+2} = \frac{a^2(a-1)}{(a^2-1)(a+2)} =$$

$$\frac{a^2\,(a-1)}{(a+1)(a-1)(a+2)} = \frac{a^2}{(a+1)(a+2)}$$

4° $$\frac{\dfrac{x+y}{y} - \dfrac{2x}{x+y}}{\dfrac{x+y}{y} + \dfrac{2y}{x-y}} = \frac{\dfrac{(x+y)^2-2xy}{y(x+y)}}{\dfrac{(x^2-y^2)+2y^2}{y(x-y)}} = \frac{\dfrac{x^2+y^2}{x+y}}{\dfrac{x^2+y^2}{x-y}} =$$

$$= \frac{x^2+y^2}{x+y} \times \frac{x-y}{x^2+y^2} = \frac{x-y}{x+y}.$$

II. EXPRESSIONS IRRATIONNELLES

125. Définition. — ***On appelle expression irrationnelle toute expression numérique ou littérale contenant un ou plusieurs radicaux.***

Exemples : $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, $a\sqrt{5}-b\sqrt{7}$, $2x-\sqrt{x^2+1}$.

Rappelons toutefois que le terme : *expression algébrique irrationnelle* ne s'applique qu'aux expressions contenant des lettres sous des radicaux (n° 81).

Dans ce qui suit, nous nous bornerons, à moins d'indication contraire, aux radicaux portant sur des nombres arithmétiques.

126. Simplification d'un radical. — Rappelons les formules (n°s 35 et 36)

$$\sqrt{a.b.c} = \sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

On les utilise de façon à simplifier les expressions placées sous des radicaux.

EXEMPLES :

1° $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9}.\sqrt{5} = 3.\sqrt{5}$.

2° $\sqrt{\frac{12}{25}} = \frac{\sqrt{4 \times 3}}{\sqrt{25}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

3° $\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}.\sqrt{a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

4° $\sqrt{a^6b^4c^3} = \sqrt{a^6}.\sqrt{b^4}.\sqrt{c^2}.\sqrt{c} = a^3b^2c\sqrt{c}$.

Lorsqu'on écrit par exemple $\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$ ou $\sqrt{\frac{a}{4}} = \frac{\sqrt{a}}{2}$, on dit que l'on fait sortir 4 du radical. Donc :

Lorsqu'on fait sortir un nombre d'un radical il faut prendre sa racine. Inversement lorsqu'on écrit $2\sqrt{a} = \sqrt{4a}$, on fait entrer 2 sous le radical, il faut l'élever au carré.

REMARQUE. — Quand on opère sur des nombres algébriques il faut prendre quelques précautions. En effet (n° 42) : $\sqrt{a^2} = |a|$, donc si a *est négatif* $\sqrt{a^2} = -a$.

Ainsi : $\sqrt{(-3)^2.5} = 3.\sqrt{5}$ et $-2.\sqrt{3} = -\sqrt{(-2)^2.3}$

$\sqrt{5x^2} = \begin{cases} x\sqrt{5} & \text{lorsque } x \text{ est positif.} \\ -x\sqrt{5} & \text{lorsque } x \text{ est négatif.} \end{cases}$

127. Opérations sur les expressions irrationnelles. — Les règles de calcul algébrique étudiées précédemment s'appliquent aux expressions irrationnelles. Il suffit de considérer chaque radical comme un nombre ou une lettre.

EXEMPLES :

1° $\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{27} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = (5 - 2 + 3)\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

2° $\sqrt{12} \times \sqrt{6} = \sqrt{12 \times 6} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

3° $(a + \sqrt{2})(b - \sqrt{2}) = ab - a\sqrt{2} + b\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2 = ab - (a - b)\sqrt{2} - 2$.

4° $(a + \sqrt{b})^2 = a^2 + 2a\sqrt{b} + b$.

5° $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$.

6° $a\sqrt{a} - b\sqrt{b} = (\sqrt{a})^3 - (\sqrt{b})^3 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})[(\sqrt{a})^2 + \sqrt{a}.\sqrt{b} + (\sqrt{b^2})]$
$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)$.

128. Fractions irrationnelles. — Il y a avantage dans les calculs, à avoir des dénominateurs rationnels.

EXEMPLES.

1° $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

$$2^{o}\quad \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

$$3^{o}\quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}.$$

Les expressions irrationnelles telles que $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$ ou $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ sont dites conjuguées. D'où la règle :

Pour rendre rationnel le dénominateur d'une fraction il suffit de multiplier ses deux termes par l'expression conjuguée du dénominateur.

EXERCICES

— **Simplifier les fractions :**

202. $\frac{648}{1.512}$ **203.** $-\frac{2.646}{6.615}$ **204.** $\frac{2.261}{4.199}$

205. $\frac{10a^5b^2x^3}{25a^3b^4x}$ **206.** $\frac{-26a^2b^3x}{91ab^4y^2}$ **207.** $\frac{51a^2bx^3y^7}{68ab^2x^5y^3}$

208. $\frac{a^2-ax}{a^2-x^2}$ **209.** $\frac{2x^2-3ax}{4x^2-9a^2}$ **210.** $\frac{2x^2-x}{8x^3-1}$

211. $\frac{x^2+a^2-2ax}{x^2+ab-(a+b)x}$ **212.** $\frac{x^3+27}{x^2+3x}$ **213.** $\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2+ax-ay}$

214. $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$ **215.** $\frac{(2a+3)^2-a^2}{a^2-1}$ **216.** $\frac{(3a+2)^2-(a+2)^2}{a^3-a}$

217. $\frac{27x^3-12xy^2}{27x^3-8y^3}$ **218.** $\frac{(x^2+1)^2-x^2}{x^6-1}$ **219.** $\frac{x^9+27}{(x^3+3)^2-9x^3}$

220. $\frac{(ax+by)-(ay+bx)}{(ax-by)+(ay-bx)}$ **221.** $\frac{a(x^2+1)+x(a^2+1)}{a^2x^2-1}$

222. $\frac{(xy-1)^2-(x-y)^2}{(y^2+1)^2-2(y^2+1)}$ **223.** $\frac{(a-b)^2(x+y)^2}{(ax+by)^2-(ay+bx)^2}$

224. $\frac{ab(x^2-y^2)-xy(a^2-b^2)}{(ax-by)^2+4abxy}$ **225.** $\frac{(ax+mby)^2-m(ay+bx)^2}{(a^2+mb^2)^2-4ma^2b^2}$

— **Effectuer les sommes algébriques suivantes :**

226. $\frac{123}{270}-\frac{45}{175}+\frac{77}{882}$ **227.** $\frac{100}{275}-\frac{45}{189}+\frac{60}{198}$

228. $\frac{a}{b(a+b)}-\frac{b}{a(a+b)}+\frac{2}{c}$ **229** $\frac{a}{b(a-b)}+\frac{b}{a(a-b)}-\frac{2}{a-b}$

230. $\dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2-1} + \dfrac{1}{x-1}$ 231. $\dfrac{x^2}{x^2+x} - \dfrac{2x}{x-1} + \dfrac{x+3}{x^2-1}$

232. $\dfrac{x^2}{x-y} + \dfrac{y^2}{x+y} - \dfrac{2xy^2}{x^2-y^2}$ 233. $\dfrac{2x}{x^2+2xy} - \dfrac{y}{xy-2y^2} + \dfrac{4y}{x^2-4y^2}$.

234. Simplifier l'expression :

$$\frac{4x^2-(x-3)^2}{9(x^2-1)} - \frac{(x^2-9)}{(2x+3)^2-x^2} + \frac{(2x-3)^2-x^2}{4x^2-(x+3)^2}.$$

235. Simplifier l'expression :

$$\frac{4(x+3)^2}{(3x+5)^2-4x^2} - \frac{x^2-25}{9x^2-(2x+5)^2} - \frac{(2x+3)^2-x^2}{(4x+15)^2-x^2}.$$

— Utiliser les identités des exercices nos 123, 132 et 133 pour calculer les expressions :

236. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

237. $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

238. $\dfrac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}$

239. $\dfrac{(x-a)^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{(x-b)^2}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{(x-c)^2}{(c-a)(c-b)}$.

240. On pose: $A = \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y}$; $B = \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{z}$; $C = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

Calculer l'expression : $A^2 + B^2 + C^2 - ABC$.

241. Démontrer les relations

1° $A^2 - B^2 = \left[\dfrac{(a^2+b^2)A + (a^2-b^2)B}{2ab}\right]^2 - \left[\dfrac{(a^2-b^2)A + (a^2+b^2)B}{2ab}\right]^2$

2° $A^2 + B^2 = \left[\dfrac{(a^2-b^2)A - 2abB}{a^2+b^2}\right]^2 + \left[\dfrac{2abA + (a^2-b^2)B}{a^2+b^2}\right]^2$

En déduire que si une expression peut se mettre sous la forme d'une somme (ou d'une différence) de deux carrés, elle peut s'écrire sous une forme analogue d'une infinité de manières.

— Simplifier les expressions

242. $\dfrac{\dfrac{1+ab}{a-b} - b}{1 + b\dfrac{1+ab}{a-b}}$ 243. $\dfrac{\dfrac{a+b}{1-ab} + \dfrac{a-b}{1+ab}}{1 - \dfrac{a^2-b^2}{1-a^2b^2}}$

244. $\dfrac{\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2} - x}{1 + \dfrac{3x^2-x^4}{1-3x^2}}$ 245. $\dfrac{\dfrac{2}{x^2-1} + \dfrac{x^2-3}{3x^2-1}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2-1)(3x^2-1)}}$

246. $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{y+1}{y-1}}{\dfrac{y+1}{x-1}-\dfrac{x+1}{y-1}}$

247. $\dfrac{\dfrac{x+a}{ax+1}-\dfrac{x+b}{bx+1}}{1-\dfrac{(x+a)(x+b)}{(ax+1)(bx+1)}}$

248. $\dfrac{1}{a^2-4b^2)}+\dfrac{1}{(a-b)(a-2b)}-\dfrac{2}{(a+b)(a-2b)}-\dfrac{b}{a^3-2a^2b-ab^2+2b^3}$

249. $\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\times\dfrac{1+\dfrac{a}{b+c}}{1-\dfrac{a}{b+c}}\times\dfrac{b^2+c^2-(b-c)^2}{a+b+c}.$

— Calculer les expressions suivantes en utilisant l'identité :

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

250. $\dfrac{x^2-xz}{1+\dfrac{y+z}{x}}+\dfrac{y^2-xx}{1+\dfrac{z+x}{y}}+\dfrac{z^2-xy}{1+\dfrac{x+y}{z}}$

251. $\dfrac{\dfrac{a(a+b)}{a-b}+\dfrac{a(a+c)}{a-c}}{1+\dfrac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}}+\dfrac{\dfrac{b(b+c)}{b-c}+\dfrac{b(b+a)}{b-a}}{1+\dfrac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)}}+\dfrac{\dfrac{c(c+a)}{c-a}+\dfrac{c(c+b)}{c-b}}{1+\dfrac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}}$

252.

$\dfrac{b+c-2a}{\dfrac{(b-c)^3}{b^3-c^3}+\dfrac{(a-b)(a-c)}{b^2+bc+c^2}}+\dfrac{c+a-2b}{\dfrac{(c-a)^3}{c^3-a^3}+\dfrac{(b-c)(b-a)}{c^2+ca+a^2}}+\dfrac{a+b-2c}{\dfrac{(a-b)^3}{a^3-b^3}+\dfrac{(c-a)(c-b)}{a^2+ab+b^2}}$

— Simplifier les radicaux :

253. $\sqrt{4096}$

254. $\sqrt{199a^6b^4c^3}$

255. $\sqrt{49a^2(x^2+y^2)}.$

256. $\sqrt{\dfrac{432}{289}}$

257. $\sqrt{\dfrac{64a^6b^6}{25c^2}}$

258. $\sqrt{\dfrac{9a^6(a^2+b^2)^2}{(a+b)^4}}.$

— Comparer les nombres suivants :

259. $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}+1$

260. $3(3-\sqrt{7})$ et $2(\sqrt{3}-1)$.

261. $\sqrt{15}+\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{13}$

262. $\sqrt{23}-\sqrt{21}$ et $\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

263. Les nombres a, m et p étant positif et tels que $a > m > p$, démontrer que l'on a :

$$\frac{m}{\sqrt{a+m}-\sqrt{a-m}}<\frac{p}{\sqrt{a+p}-\sqrt{a-p}}$$

264. Démontrer l'identité :

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{1}{2}(A+\sqrt{A^2-B})}+\sqrt{\frac{1}{2}(A-\sqrt{A^2-B})}$$

En déduire les relations :

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}};\qquad \sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$$

265. Calculer pour $a = -5$, $b = 7$ et $x = -3$ l'expression :

$$\sqrt{a^2(b+x)^2} - 3\sqrt{2(a+b)x^2} + \sqrt{x^2 + 2ax + a^2}$$

— Rendre rationnels les dénominateurs des fractions :

266. $\dfrac{1}{3+\sqrt{5}}$ **267.** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}}$ **268.** $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

269. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ **270.** $\dfrac{5\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ **271.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

— Simplifier les expressions :

272. $\sqrt{200} - \sqrt{32} + \sqrt{72}$ **273.** $\sqrt{175} - \sqrt{112} + \sqrt{63}$

274. $(4+\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5}+1)^2$ **275.** $(5+\sqrt{3})^2 - (3+2\sqrt{3})^2$

276. $\dfrac{A\sqrt{A} - B\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}$ **277.** $\dfrac{A^2\sqrt{B} - B^2\sqrt{A}}{A\sqrt{B} - B\sqrt{A}}$

278. $\dfrac{\sqrt{5}-2}{5+2\sqrt{5}} - \dfrac{1}{2+\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **279.** $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \dfrac{2}{3+\sqrt{3}}$

280. $\dfrac{\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{\frac{3}{5}} - 2}{\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{3}{5}}}$ **281.** $\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\ (\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$.

LIVRE II. LE PREMIER DEGRÉ

NEUVIÈME LEÇON

ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

I. DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS

129. Définitions. — ***On appelle équation une égalité qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs des lettres qui y figurent.***

Ces lettres sont les inconnues de l'équation.

1er EXEMPLE. — L'égalité $x^2 - 10 = 3x$

est une *équation à une inconnue.* Les deux membres deviennent égaux si on attribue à l'inconnue x la valeur $+ 5$. Cette valeur s'appelle *solution ou racine de l'équation proposée.*

2e EXEMPLE. — L'égalité $3x - 2y = 8$

est une *équation à deux inconnues.* Ses deux membres deviennent égaux si on attribue à x la valeur $+ 2$ et à y la valeur $- 1$.

Le système de valeurs $\begin{cases} x = +2 \\ y = -1 \end{cases}$ est une *solution de l'équation.*

On appelle solution d'une équation tout système de valeurs attribuées aux inconnues pour lequel les deux membres de l'équation ont même valeur numérique.

130. Résolution d'une équation. — ***Résoudre une équation c'est en trouver toutes les racines ou toutes les solutions.***

Les théorèmes sur les égalités (n°s 47 à 50) permettent de transformer

une équation en une autre équation admettant les mêmes solutions. Étant donnée une équation on peut :

1° *Réduire séparément les deux membres de l'équation.*

2° *Ajouter ou retrancher une même expression aux deux membres de l'équation* et par suite supprimer les termes communs aux deux membres, ou transposer un terme d'un membre dans l'autre, à condition de changer son signe.

3° *Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre non nul*, et par suite, simplifier une équation en divisant tous ses termes par un même nombre ou chasser les dénominateurs numériques en multipliant tous les termes par un multiple commun des dénominateurs.

— On dirige les calculs de façon à obtenir les solutions et par suite à résoudre l'équation.

131. Remarques. — 1° Lorsqu'on multiplie les deux membres d'une équation par une expression qui contient l'inconnue, l'équation obtenue peut admettre des racines qui ne vérifient pas l'équation primitive.

Soit l'équation : $3x - 2 = 0. \qquad (1)$

Multiplions les deux membres par $x - 1$

$$(3x - 2)(x - 1) = 0. \qquad (2)$$

On vérifie que $x = 1$ est racine de l'équation (2) mais pas de l'équation (1). On dit que *cette racine est étrangère à l'équation initiale.*

2° Lorsqu'on divise les deux membres d'une équation par une expression qui contient l'inconnue, l'équation primitive peut admettre des racines qui ne vérifient pas la nouvelle équation.

Soit l'équation : $x^3 - 2x = 3x. \qquad (1)$

Divisons les deux membres par x :

$$x^2 - 2 = 3 \qquad (2)$$

On vérifie que $x = 0$ est racine de l'équation (1) et non de l'équation (2).

132. Équations entières. — ***On appelle équation entière une équation dont les deux membres sont des polynômes.***

En faisant passer tous les termes dans le premier membre, l'autre se réduit à zéro. Le degré, par rapport à l'ensemble des inconnues, du polynôme réduit obtenu dans le premier membre est ***le degré de l'équation.***

EXEMPLES :

$3x - 5 = 0$ est du premier degré.

$2x - 3y + 4 = 0$ est du premier degré.

$3x^2 - 5x + 2 = 0$ est du second degré.

$xy - 3x + 2y - 1 = 0$ est du second degré.

II. ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

133. Équation numérique du premier degré. — Rappelons la marche à suivre pour résoudre une telle équation :

EXEMPLE : $$\frac{5x-7}{4}-\frac{9x-4}{5}=2-\frac{3x+11}{8}.$$

Chassons les dénominateurs. Leur P. P. C. M. est 40. Multiplions tous les termes par 40

$$\frac{40\,(5x-7)}{4}-\frac{40\,(9x-4)}{5}=40\times 2-\frac{40\,(3x+11)}{8}.$$

Soit :

$$10\,(5x-7)-8\,(9x-4)=80-5\,(3x+11).$$

Développons :

$$50x-70-72x+32=80-15x-55.$$

Faisons passer tous les termes en x dans le premier membre et les termes connus dans l'autre.

$$50x-72x+15x=70-32+80-55.$$

Réduisons les termes semblables :

$$-7x=63.$$

Divisons les deux membres par le coefficient de x.

Il vient : $x=\frac{63}{-7}$ Soit : $x=-9$.

VÉRIFICATION. — Calculons pour $x=-9$, la valeur numérique de chaque membre de l'équation proposée :

1er *membre :* $\frac{-45-7}{4}-\frac{-81-4}{5}=-\frac{52}{4}+\frac{85}{5}=-13+17=4.$

2e *membre :* $2-\frac{-27+11}{8}=2+\frac{16}{8}=2+2=4.$

Les deux valeurs sont égales. — 9 est donc bien racine de l'équation proposée.

134. Cas général. — Toute équation du premier degré à une inconnue, se ramène après suppression des dénominateurs et réduction des termes inconnus dans un membre et des termes connus dans l'autre, à la forme :

$$ax=b.$$

Pour obtenir x, il faut alors diviser les deux membres par a, opération qui n'est possible que si a n'est pas nul. Distinguons deux cas possibles :

1° $a \neq 0$. Il vient $x = \frac{b}{a}$ racine de l'équation proposée.

2° $a = 0$. L'équation se réduit à $0.x = b$.

Si $b \neq 0$: Aucune valeur de x ne peut vérifier l'équation. On dit que ***l'équation est impossible.***

Si $b = 0$ l'équation se réduit à $0\,x = 0$. Elle est vérifiée quel que soit x. On dit que l'***équation est indéterminée*** (elle se réduit à une identité).

En général, l'équation du premier degré à une inconnue admet une solution et une seule.

Exceptionnellement, elle est impossible ou indéterminée.

Par suite si une équation du premier degré admet deux solutions, elle est indéterminée et elle est vérifiée pour toute valeur de x.

135. Exemple d'équation impossible :

Soit l'équation : $5(x - 1) - 3x = 2x + 3.$

D'où : $5x - 5 - 3x = 2x + 3$

$5x - 3x - 2x = 5 + 3.$

Soit : $0x = 8$ donc *impossibilité.*

L'équation s'écrit d'ailleurs $2x - 5 = 2x + 3$ manifestement impossible.

136. Exemple d'équation indéterminée :

$$\frac{x+1}{3} - \frac{2x+1}{5} + \frac{x+4}{6} = \frac{x+8}{10}.$$

Chassons les dénominateurs, en multipliant tous les termes par 30.

$$10(x + 1) - 6(2x + 1) + 5(x + 4) = 3(x + 8)$$

$$10x + 10 - 12x - 6 + 5x + 20 = 3x + 24.$$

Transposons : $10x - 12x + 5x - 3x = -10 + 6 - 20 + 24.$

Soit : $0x = 0$ *équation indéterminée.*

On vérifie que $x = 2$, $x = 5$ par exemple, sont solutions de l'équation proposée.

***137. Équations paramétriques.** — On désigne ainsi, des équations où figurent, outre les inconnues, des lettres appelées *paramètres* dont la valeur est supposée connue.

Une équation paramétrique à une inconnue se résout de la même façon qu'une équation numérique. Toutefois, il est bon d'étudier pour quelles valeurs des paramètres l'équation est impossible ou indéterminée. C'est ce qu'on appelle *discuter l'équation.*

***138.** EXEMPLE I. — *Résoudre et discuter l'équation :*

$$2(m-1)x - m(x-1) = 2m + 3.$$

Développons :

$$2mx - 2x - mx + m = 2m + 3$$

$$mx - 2x = m + 3.$$

Soit $(m-2)x = m + 3.$

Le coefficient de x est nul si $m - 2 = 0$ ou si $m = 2.$

1° Si $m \neq 2$ on a $m - 2 \neq 0$ d'où : $x = \dfrac{m+3}{m-2}.$

2° Si $m = 2$ l'équation se réduit à : $0.x = 5.$ Elle est impossible.

***139.** EXEMPLE II. — *Résoudre et discuter l'équation :*

$$m^2(x-1) + 3mx = (m^2+3)x - 1.$$

Développons : $m^2x - m^2 + 3mx = m^2x + 3x - 1.$

Transposons : $m^2x + 3mx - m^2x - 3x = m^2 - 1.$

Soit $3(m-1)x = m^2 - 1.$

Le coefficient de x s'annule pour $m = 1.$

1° Si $m \neq 1.$ Il vient $x = \dfrac{m^2-1}{3(m-1)} = \dfrac{m+1}{3}.$

2° Si $m = 1.$ On obtient $0.x = 0.$ L'équation est indéterminée.

***140.** EXEMPLE III. — *Résoudre et discuter l'équation :*

$$\frac{4x+2}{3} - \frac{x+b}{a} = \frac{5(x-1)}{6}.$$

Il faut supposer $a \neq 0$ pour que l'équation ait un sens. Multiplions les deux membres par $6a$.

$$2a(4x+2) - 6(x+b) = 5a(x-1)$$

$$8ax + 4a - 6x - 6b = 5ax - 5a$$

$$(8a - 6 - 5a)x = -4a + 6b - 5a.$$

Soit $(3a-6)x = 6b - 9a.$

Simplifions par 3 : $(a-2)x = 2b - 3a.$

Le coefficient de x s'annule pour $a = 2.$

1° $a \neq 2.$ Il vient : $x = \dfrac{2b-3a}{a-2}.$

2° $a = 2.$ L'équation se réduit à : $0x = 2b - 6.$

Le second membre est nul si $2b - 6 = 0$ ou $b = 3.$

Si $b \neq 3,$ $2b - 6 \neq 0$ l'équation est impossible.

Si $b = 3,$ $2b - 6 = 0$ l'équation est indéterminée.

EXERCICES

— Résoudre les équations :

282. $\frac{x+7}{4} - \frac{x-1}{6} = \frac{x+2}{3}$

283. $\frac{x+11}{6} + \frac{x+15}{8} = \frac{2x+19}{9}$

284. $\frac{5x-14}{3} + \frac{7x-12}{9} = \frac{3x-146}{4}$

285. $\frac{13x+23}{15} + \frac{x-31}{35} = \frac{271-x}{21}$

286. $\frac{3x+3}{18} + \frac{2x-1}{45} = \frac{3x-19}{10}$

287. $\frac{9x+4}{77} - \frac{12x+5}{14} = \frac{28x+11}{22}$

288. $\frac{x+52}{35} + \frac{3x+64}{65} = \frac{x+74}{91}$

289. $\frac{x+11}{15} - \frac{3(x+21)}{85} = \frac{5x+139}{51}$

290. $\frac{2x+1}{77} - \frac{x+6}{88} = \frac{x-4}{56}$

291. $\frac{7x-132}{95} - \frac{5x-22}{209} = \frac{3(30-x)}{55}$

292. $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(x+3)^2}{6} = \frac{(x-2)(x+1)}{2}$

293. $\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{3x+1}{5} = \frac{(x-5)(3x+10)}{6}$

294. $\frac{(x-2)^2}{12} - \frac{(x+1)^2}{21} = \frac{(x-4)(x-6)}{28}$

295. $\frac{(x+1)^2-(x-2)^2}{9} = \frac{(2x-3)^2+35}{4}$

— Résoudre les équations :

296. $12(x+2) - 49 - 17,5(x-1) = 30,9 + 2,5x - 60,8.$

297. $13,7(x+3) - 73,25 + 25,8(x-2) = 60,5 - 17,1(x-0,5) + 19,83.$

298. $14,23x - 36,95 - 15(x-5) = 16,32 + 3,73(x+5) - 35,08.$

299. $\frac{25x-655}{95} - \frac{5(x-12)}{209} = \frac{89-3x-\frac{2(x-18)}{5}}{11}$

300. $\frac{8(x+22)}{45} - \frac{7x+149+\frac{6(x+12)}{5}}{9} = \frac{x+35+\frac{2(x+50)}{9}}{5}$

301. $\frac{x+\frac{2(3-x)}{5}}{14} - \frac{5x-4(x-1)}{24} = \frac{7x+2+\frac{9-3x}{5}}{12} + \frac{2}{3}$

302. $\frac{(x+3)(x-2)}{10} - \frac{(x+2)(x-1)}{14} = \frac{(x-3)(x+2)+4}{35}$

303. $\frac{(3x+4)(x+4)}{7} - \frac{(2x+5)(2x-1)}{11} = \frac{(5x+13)(x+20)}{77}$

304. $\frac{(x-3)^2}{6} - \frac{(x-6)^2}{15} = \frac{(x+9)^2}{10} - \frac{13x-1}{3}$

305. $\frac{3(2x-3)^2}{4} + \frac{2(3x-2)^2}{9} + \frac{(6x-5)^2}{36} = \frac{(2x-3)(3x-2)(6x-5)}{2}$.

— **Résoudre et discuter les équations :**

306. $3(m+1)x + 4 = 2x + 5(m+1)$

307. $m^2(x+1) = x + m$.

308. $3(m-2)x + m(4x-7) = 3(m-1)$

309. $(m^2-1)x = m(m+1)(m+2)$.

310. $mx + 2(x-m) = (m+1)^2 + 3$

311. $(m+2)x + 4(2m+1) = m^2 + 4(x-1)$

312. $a(ax+2b^2) - a^3 = b^2(x+a)$

313. $(a+b)^2x + 2a^2 = 2a(a+b) + (a^2+b^2)x$

314. $\frac{mx+3}{6} + \frac{m^2-1}{2} = \frac{x+5}{10} + \frac{2}{5}(x+m^2+1)$

315. $\frac{(x-m)^2}{3} + \frac{(x-2m)(x+3)}{2} = \frac{(5x-1)(x-4)}{6} - \frac{2}{3}(2m-1)(m-1)$

316. $\frac{m^2(x+2)^2}{8} - 2(2x+m+1) = (m+1)^2 + \frac{m^2(x-2)^2}{8} + 1$

317. $\frac{a^6-b^6}{a^3-b^3} + \frac{a^3-b^3}{a-b}[2x-(a+b)] = 2\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}x$.

318. 1° **Résoudre l'équation**

$$(x-2)^3 + (x-4)^3 + (x-7)^3 - 3(x-2)(x-4)(x-7) = 0.$$

2° **Démontrer l'identité**

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = \frac{1}{2}(A+B+C)[(B-C)^2 + (C-A)^2 + (A-B)^2].$$

3° **Utiliser l'identité précédente pour résoudre l'équation**

$$(x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3 - 3(x-a)(x-b)(x-c) = 0.$$

Retrouver pour $a = 2$, $b = 4$ et $c = 7$ le résultat du 1°.

DIXIÈME LEÇON

ÉQUATIONS SE RAMENANT AU PREMIER DEGRÉ

141. Équations de la forme A.B.C = 0.

On sait que pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul (n° 13). Par suite :

Les racines de l'équation A.B.C = 0 ***sont les racines des équations :*** A = 0, B = 0 et C = 0.

142. Exemple I. — *Résoudre l'équation :*

$$(x-2)(3x+2)(2x-7)=0.$$

Cette équation se décompose en trois autres :

$$\left\{\begin{array}{l} x-2=0 \\ 3x+2=0 \\ 2x-7=0 \end{array}\right. \quad \text{D'où les 3 racines :} \quad \left\{\begin{array}{l} x=+2 \\ x=-\dfrac{2}{3} \\ x=+\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$$

143. Exemple II. — *Résoudre l'équation :*

$$x^3-4x=0.$$

Ramenons à la forme précédente en décomposant le premier membre en facteurs :

$$x(x^2-4)=0$$

ou

$$x(x+2)(x-2)=0.$$

Cette équation se décompose en trois autres :

$$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x+2=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \quad \text{D'où les trois racines :} \quad \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=+2. \end{array}\right.$$

144. EXEMPLE III. — *Résoudre l'équation :*

$$(3x - 5)^2 - (x - 3)^2 = 0.$$

Le premier membre est de la forme $A^2 - B^2$. On peut donc l'écrire sous la forme du produit $(A + B)(A - B)$. Soit :

$$(3x - 5 + x - 3)(3x - 5 - x + 3) = 0$$

ou
$$(4x - 8)(2x - 2) = 0.$$

L'équation se décompose en deux autres :

$$\begin{cases} 4x - 8 = 0 \\ 2x - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{D'où les deux racines :} \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 1. \end{cases}$$

145. Équations renfermant l'inconnue en dénominateur.

EXEMPLE I. — *Résoudre l'équation :* $\dfrac{x^2 - 9}{x + 2} = 0.$

La fraction qui constitue le premier membre n'est définie que si son dénominateur $x + 2$ est différent de zéro, donc si $x \neq -2$. Supposons cette condition réalisée. Pour que la fraction soit nulle, il faut et il suffit que son numérateur soit nul. D'où :

$$x^2 - 9 = 0. \qquad \text{Soit} \qquad (x + 3)(x - 3) = 0.$$

Cette équation a pour racines $x = 3$ et $x = -3$. Ces deux valeurs étant différentes de -2 sont racines de l'équation proposée.

— En général :

Les racines de l'équation $\dfrac{A}{B} = 0$ ***sont celles de l'équation*** $A = 0$ ***qui n'annulent pas*** B.

146. EXEMPLE II. — *Résoudre l'équation :* $\dfrac{x + 2}{x - 2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x(x - 2)}$

L'équation n'a de sens que si les dénominateurs sont différents de zéro, c'est-à-dire si $x \neq 0$ et $x \neq +2$. Supposons ces conditions réalisées, nous pouvons chasser les dénominateurs en multipliant tous les termes par $x(x - 2)$.

$$x(x + 2) - (x - 2) = 2$$
$$x^2 + 2x - x + 2 = 2.$$

Soit $\qquad x^2 + x = 0 \qquad$ ou $\qquad x(x + 1) = 0.$

D'où les deux valeurs $x = 0$ et $x = -1$.

La valeur $x = 0$ est une des valeurs exclues. Seule $x = -1$ est racine de l'équation proposée.

— La méthode générale qui en découle est donc la suivante :

On chasse les dénominateurs et on résout l'équation entière obtenue. On écarte parmi les racines trouvées, celles qui annulent un des dénominateurs de l'équation initiale.

*ÉQUATIONS IRRATIONNELLES

147. Définition. — ***Une équation irrationnelle est une équation où l'inconnue figure sous un ou plusieurs radicaux.***

Pour résoudre une telle équation, on fait disparaître les radicaux en élevant au carré les deux membres de l'équation. Notons que :

148. ***Lorsqu'on élève au carré les deux membres d'une équation, on peut introduire des solutions étrangères à cette équation.***

Soit une équation $A = B$ et considérons l'équation :

$$A^2 = B^2.$$

Cette dernière s'écrit : $A^2 - B^2 = 0$ ou $(A - B)(A + B) = 0$.

Elle admet donc les solutions des deux équations :

1° $A - B = 0$ ou $A = B$ qui est l'équation initiale.

2° $A + B = 0$ ou $A = -B$ dont les racines sont étrangères à l'équation initiale.

149. Équation renfermant un seul radical. — *Soit à résoudre l'équation :*

$$2x - \sqrt{3x^2 + 1} = 1.$$

Isolons le radical dans le second membre

$$2x - 1 = \sqrt{3x^2 + 1} \qquad (1)$$

Élevons les deux membres au carré :

$$4x^2 - 4x + 1 = 3x^2 + 1 \qquad (2)$$

$$x^2 - 4x = 0$$

Soit $x(x - 4) = 0.$

D'où les deux racines de l'équation (2) $x = 0$ et $x = 4$.

On vérifie que seule $x = 4$ est racine de l'équation proposée. $x = 0$ serait racine de l'équation $2x + \sqrt{3x^2 + 1} = 1$.

150. Remarque. — Toute racine de l'équation (2) donne la même valeur absolue aux deux membres de l'équation (1). Comme le second membre de (1) est positif (ou nul), seule convient la racine $x = 4$ pour laquelle le premier membre est également positif.

— En général, si A et B sont deux polynômes :

Les racines de l'équation $A = \sqrt{B}$ ***sont les racines de l'équation*** $A^2 = B$ ***pour lesquelles*** $A > 0$.

Il est inutile de vérifier que, pour les racines ainsi trouvées, l'expression B sous le radical est positive (ou nulle) car sa valeur est égale à celle de A^2 qui ne peut être négative.

151. Équations renfermant plusieurs radicaux. — On réduit le nombre de radicaux en élevant les deux membres au carré, de façon à obtenir finalement une équation entière. Il faut alors vérifier si les racines de l'équation finale obtenue, satisfont ou non, à l'équation proposée.

EXEMPLE. — *Résoudre l'équation :*

$$\sqrt{x+20} - \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x-1}.$$

Élevons les deux membres au carré :

$$x + 20 + x - 4 - 2\sqrt{(x+20)(x-4)} = 4(x-1).$$

Simplifions et isolons le radical :

$$2x + 16 - 2\sqrt{(x+20)(x-4)} = 4x - 4$$

$$10 - x = \sqrt{(x+20)(x-4)}.$$

Élevons au carré : $100 - 20x + x^2 = x^2 + 20x - 4x - 80$

$$-36x = -180.$$

D'où : $x = 5.$

On vérifie que l'équation proposée devient pour $x = 5$

$$\sqrt{25} - \sqrt{1} = 2\sqrt{4}$$

ou $5 - 1 = 2 \times 2.$

$x = 5$ est donc solution de l'équation proposée.

EXERCICES

Résoudre les équations :

319. $x(x-1)(x+3) = 0$

320. $(x+4)(2x+7)(3x+5) = 0.$

321. $3x(x-4)(x+5) = 0$

322. $(7-x)(4x-3)(5-2x) = 0.$

323. $(2x+3)(x^2-49) = 0.$

324. $(5-3x)(9x^2-25) = 0.$

325. $(x-2)(81x-4x^3) = 0$

326. $27x^2(x+3) - 12(x^2+3x) = 0.$

327. $(9-x^2)(8x^2-50) = 0$

328. $(2x+3)(4x-1) = 9 - 4x^2.$

329. $(x+2)^2 - x^2 + 4 = 0$

330. $(5-2x)(2x+7) = 4x^2 - 25.$

331. $x^3 - 1 + (x-1)(1-x^2) = 0$

332. $x^3 + 27 + (x+3)(x-9) = 0.$

333. $(x+5)^2 - (2x-3)^2 = 0$

334. $(2x+7)^2 - 9(x+2)^2 = 0.$

335. $4(2x+7)^2 - 9(x+3)^2 = 0$

336. $(4x^2-3x-18)^2 - (4x^2+3x)^2 = 0.$

337. $(5x^2+3x-2)^2 = (4x^2-3x-2)^2.$

338. $(3x + 2)(x^2 - 1) = (9x^2 - 4)(x + 1)$.

339. Former un polynôme du 3e degré s'annulant pour $x = 1$, $x = -2$, et $x = 3$ et prenant pour $x = 2$ la valeur numérique 10.

340. 1° Démontrer l'identité :

$$(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 = 3(b - c)(c - a)(a - b).$$

2° Utiliser cette identité pour résoudre l'équation :

$$[3(x + 1) - 2(x + 3)]^3 + [2(x + 3) - x + 5]^3 + [x - 5 - 3(x + 1)]^3 = 0.$$

341. Décomposer en un produit de 4 facteurs l'expression :

$$(ax + mb)^2 - (am + bx)^2.$$

1° On suppose que a et b ont des valeurs absolues distinctes. Quelles valeurs faut-il donner à x pour que l'expression soit nulle?

2° Que se passe-t-il lorsque a et b ont même valeur absolue?

— Résoudre les équations :

342. $\dfrac{2x + 5}{x + 3} + \dfrac{3x - 2}{x} = 5$

343. $\dfrac{3x + 4}{5} + \dfrac{2x - 3}{4x - 5} = \dfrac{9x - 8}{15}$

344. $\dfrac{7}{x - 3} - \dfrac{4}{x - 5} = \dfrac{3}{x + 1}$

345. $\dfrac{12}{x - 7} - \dfrac{5}{x - 1} = \dfrac{7}{x - 10}$

346. $\dfrac{2}{x - 4} + \dfrac{1}{2x - 3} = \dfrac{5}{7x - 6}$

347. $\dfrac{1}{5x + 8} + \dfrac{1}{x + 4} = \dfrac{9}{8(x + 3)}$

348. $\dfrac{x^2}{x - 1} - \dfrac{x^2}{x + 1} = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

349. $\dfrac{x + 1}{x - 1} - \dfrac{x - 1}{x + 1} = 3x\left(1 - \dfrac{x - 1}{x + 1}\right)$

350. $\dfrac{x - 1}{x} - \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{2x - 1}{x^2 + x}$

351. $\dfrac{6x^2 + 7x + 8}{2x + 1} = \dfrac{3x^2 - 2x - 16}{x - 2}$

352. $\dfrac{2x^2 + 4x - 9}{4x + 9} = \dfrac{4x + 9}{2x^2 + 4x - 9}$

353. $\dfrac{10x^2 + 33x + 42}{15x^2 + 39x + 36} = \dfrac{6x^2 + 19x + 28}{9x^2 + 23x + 24}$

354. $\dfrac{\dfrac{x + 2a}{2x + a} + b}{2x + a + \dfrac{3a^2}{2x + a}} = \dfrac{\dfrac{2x + a}{x + 2a} + b}{2\left(x + 2a - \dfrac{3a^2}{x + 2a}\right)}$

355. $\dfrac{\dfrac{2x - 5a}{4a} + \dfrac{2x + 4a}{3x}}{\dfrac{3x - 8a}{4a} + \dfrac{3x + 5a}{3x}} = \dfrac{\dfrac{2x - 5a}{3a} - \dfrac{2x + 4a}{2x}}{\dfrac{3x - 8a}{3a} - \dfrac{3x + 5a}{2x}}$

— Résoudre les équations :

356. $x - \sqrt{x^2 - 5} = 1$

357. $\sqrt{x^2 - x - 4} + x = 9$

358. $2x + \sqrt{x^2 + 9} = x + 9$

359. $1 - 2x = \sqrt{4x^2 - 2x + 7}$

360. $x - \sqrt{2x + 1} = 1$

361. $2 - \sqrt{3x + 4} = 2x$

362. $2x + \sqrt{(3x - 4)(x - 1)} = 2$

363. $\sqrt{x + 5} - \sqrt{x - 2} = 1$

364. $\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x - 1} = \sqrt{3}$

365. $\sqrt{x + 9} + \sqrt{x - 3} = 2\sqrt{x + 2}$

ONZIÈME LEÇON

INÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

I. DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS

152. Définition. — ***On appelle inéquation une inégalité qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs des lettres qui y figurent.***

Ces lettres sont les inconnues de l'inéquation.

L'inégalité $$6x - 5 > 7$$
est une *inéquation à une inconnue.*

Les nombres $x = 3$, $x = 4$, $x = \frac{9}{2}$... vérifient cette inégalité. *Ce sont des solutions* de l'inéquation envisagée.

Les nombres $x = \frac{3}{2}$, $x = 0$, $x = -2$,... ne sont pas solutions. En général :

On appelle solution d'une inéquation à une inconnue, toute valeur de cette inconnue pour laquelle l'inéquation devient une inégalité numérique.

153. Résolution d'une inéquation. — ***Résoudre une inéquation c'est en trouver toutes les solutions.*** Les théorèmes sur les inégalités (nos 44 et 46) permettent de transformer une inéquation en une autre inéquation admettant les mêmes solutions. Étant donnée une inéquation, on peut :

1° *Réduire séparément les deux membres de l'inéquation.*

2° *Ajouter ou retrancher une même expression aux deux membres de l'inéquation* et par suite supprimer les termes communs aux deux membres ou

transposer un terme d'un membre dans l'autre à condition de changer son signe :

Si on fait passer tous les termes dans le premier membre, l'inéquation prend la forme $A > 0$ ou $A < 0$. Lorsque A est un polynôme du 1er degré on dit que l'inéquation est du premier degré, etc...

3° *Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre positif en conservant le sens de l'inéquation ou par un même nombre négatif à condition de changer le sens de l'inéquation.*

Par suite on peut simplifier une inéquation en divisant tous ses termes par un même nombre positif, chasser les dénominateurs en multipliant tous les termes par un multiple commun positif des dénominateurs et changer les signes de deux membres à condition de changer en même temps le sens de l'inéquation.

— On dirige les calculs de façon à obtenir les solutions et par conséquent à résoudre l'inéquation.

154. Remarque. — Il importe de bien se rappeler les opérations qu'il n'est pas légitime, en général, d'effectuer sur une inéquation.

1° ***Il ne faut pas multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par une même expression littérale*** à moins que son signe soit bien déterminé.

Ainsi de : $(m^2 + 1)(3x - 7) > 0$ on déduit $3x - 7 > 0$

car $m^2 + 1$ étant supérieur à 1, est positif quel que soit m.

Mais de : $(m^2 - 1)(3x - 7) > 0$ on ne peut déduire $3x - 7 > 0$ car $m^2 - 1$ n'est pas toujours positif. Pour $m = 0$ par exemple, on a, au contraire, $3x - 7 < 0$.

2° En particulier :

Il ne faut pas chasser des dénominateurs contenant l'inconnue.

3° ***Il ne faut pas élever au carré les deux membres d'une inéquation*** ou ***en extraire la racine carrée.***

Nous verrons quelles sont les précautions à prendre, lorsque nous serons amenés à utiliser l'une de ces opérations.

II. INÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

155. Inéquation numérique. — La marche à suivre est la même que pour une équation numérique du premier degré. Ne pas oublier de changer le sens de l'inéquation lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise les deux membres par un nombre négatif ou lorsqu'on change les signes des deux membres.

Exemple. — *Résoudre l'inéquation :*

$$\frac{4x+1}{4} - \frac{5x+2}{6} < \frac{x+1}{3}.$$

Chassons les dénominateurs en multipliant tous les termes par 12.

$$3(4x+1) - 2(5x+2) < 4(x+1)$$

ou $$12x + 3 - 10x - 4 < 4x + 4.$$

Transposons : $$12x - 10x - 4x < -3 + 4 + 4.$$

Soit : $$-2x < 5.$$

Divisons les deux membres par -2. Il faut changer le sens

$$x > -\frac{5}{2}.$$

Il est facile de vérifier que toute valeur de x supérieure à $-\frac{5}{2}$ est solution de l'inéquation proposée.

156. Interprétation graphique. — Alors que les solutions d'une équation sont en général en nombre limité, il n'en est pas ainsi pour une inéquation.

Marquons sur un axe $x'x$ le point A d'abscisse $-\frac{5}{2}$ (fig. 17). Les points dont les abscisses sont solutions de l'inéquation précédente sont les points de la demi-droite Ax. Afin de les distinguer des points de la demi-droite Ax', on met des hachures sur cette dernière.

x' A O x

$-\infty$ $-\frac{5}{2}$ $+\infty$

Fig. 17.

Remarque. — On appelle *intervalle* (a, b) l'ensemble des nombres algébriques compris entre les nombres a et b. Si $a < b$ tout nombre x de l'intervalle (a, b) vérifie la double condition

$$a < x < b.$$

Dans l'exemple envisagé, x est solution de l'inéquation si $-\frac{5}{2} < x < +\infty$. C'est pourquoi on dit que *les solutions de cette inéquation sont les nombres de l'intervalle* $(-\frac{5}{2}, +\infty)$.

157. Cas général. — Toute inéquation du premier degré à une inconnue se ramène après réduction des termes en x dans un membre et des termes connus dans l'autre à l'une des formes : $ax > b$ ou $ax < b$.

La seconde forme se ramène à la première en multipliant les deux membres par — 1. Nous avons donc à discuter la forme unique :

$$ax > b.$$

Trois cas sont à envisager suivant les valeurs du coefficient a.

1° *a positif* : Il vient : $x > \frac{b}{a}$ (Pas de changement de sens).

2° *a négatif* : Il vient : $x < \frac{b}{a}$ (Changement de sens).

3° $a = 0$ Il reste : $0 > b$.

Cette inégalité numérique est : toujours vérifiée si b est négatif; jamais vérifiée si b est positif ou nul.

***158. Inéquation littérale.** — *Soit à résoudre l'inéquation paramétrique*

$$\frac{m(x-2)}{6} + \frac{x-m}{3} > \frac{x+1}{2}.$$

Chassons les dénominateurs.

$$m(x-2) + 2(x-m) > 3(x+1)$$
$$mx - 2m + 2x - 2m > 3x + 3.$$

Transposons : $mx + 2x - 3x > 2m + 2m + 3.$

Soit $(m-1)x > 4m + 3.$

Trois cas sont à envisager suivant que le coefficient $m - 1$ est positif, négatif ou nul.

1° $m - 1 > 0$ ou $m > 1$. Il vient : $x > \frac{4m+3}{m-1}$

2° $m - 1 < 0$ ou $m < 1$. Il vient : $x < \frac{4m+3}{m-1}$

3° $m - 1 = 0$ ou $m = 1$. Il reste : $0.x > 7$
l'inéquation est impossible.

***159. Inéquations simultanées.** — On appelle inéquations simultanées, deux ou plusieurs inéquations qui doivent être vérifiées, à la fois, par les mêmes valeurs des inconnues.

Il suffit de résoudre séparément chacune des inéquations et de conserver les solutions communes à toutes ces inéquations.

EXEMPLE. — *Résoudre les inéquations simultanées :*

$$\begin{cases} 5x - 7 < 3x \\ 2x + 5 > 1. \end{cases}$$

La première inéquation donne :

$$5x - 3x < 7.$$

D'où $$2x < 7 \quad \text{et} \quad x < \frac{7}{2}$$

La seconde inéquation donne :

$$2x > -5 + 1.$$

D'où $$2x > -4 \quad \text{et} \quad x > -2.$$

On voit immédiatement que les valeurs de x qui vérifient les deux inéquations sont les valeurs de l'intervalle $\left(-2, \frac{7}{2}\right)$. Donc :

$$-2 < x < \frac{7}{2}$$

Graphiquement, il suffit de hachurer sur un axe (fig. 18) les intervalles pour lesquels x ne satisfait pas à l'une des inéquations. Les intervalles non hachurés, s'il en reste, correspondent aux solutions communes aux inéquations.

x' B 0 A x

$-\infty$ -2 $\frac{7}{2}$ $+\infty$

Fig. 18.

Dans l'exemple précédent, il faut hachurer Ax, pour supprimer les valeurs ne vérifiant pas la première inéquation, puis Bx' pour supprimer celles qui ne satisfont pas à la seconde. Il reste le segment BA correspondant à l'intervalle $\left(-2, \frac{7}{2}\right)$.

EXERCICES

— **Résoudre les inéquations :**

366. $\frac{x}{30} + \frac{1}{6} - \frac{x}{5} > \frac{2x}{45} + 16$

367. $\frac{5x}{12} - \frac{1}{2} - \frac{7x}{24} > \frac{x}{6} - 1.$

368. $\frac{3x}{7} - \frac{x}{3} + \frac{19}{5} < \frac{2x}{15} - 3$

369. $\frac{5x}{2} - \frac{18}{5} - \frac{3x}{4} < \frac{8x}{5} + \frac{9}{4}.$

370. $\frac{5x}{6} + \frac{1}{4} - \frac{7x}{12} > \frac{x}{3} + \frac{3}{16}$

371. $\frac{3x}{7} - \frac{x}{3} + \frac{19}{25} < \frac{2x}{15} + \frac{3}{5}.$

372. $\frac{x-5}{4} - \frac{x+8}{3} < \frac{x+11}{6}$

373. $\frac{x+7}{10} - \frac{x-5}{5} > \frac{x-9}{3}.$

374. $\frac{8x+5}{9} - \frac{2x+23}{6} < \frac{x+4}{4} - \frac{x}{12}$

375. $\frac{7x-3}{8} + \frac{x+31}{4} > \frac{2x+7}{3}.$

376. $\frac{5x+7}{4} + \frac{3x+5}{8} > \frac{9x+4}{5}$

377. $\frac{13x-3}{15} + \frac{x+4}{35} > 15 - \frac{x}{21}$

378. $\frac{7x+2}{15} - \frac{2x+15}{24} > \frac{292-3x}{40}$

379. $\frac{28x+5}{8} - \frac{40x+3}{15} < \frac{3(5x-2)}{40}$

380. $\frac{5x-17}{14} + \frac{x-3}{26} > \frac{29-9x}{91}$

381. $\frac{13x+47}{24} + \frac{7x+26}{21} > \frac{3x-5}{56}$.

— **Résoudre les inéquations paramétriques :**

382. $mx + 1 > x + m^2$

383. $x + 2m < 1 + 2mx$.

384. $x + 9m^2 > 3mx + 1$

385. $x(1-m)^2 > 1 - 2mx$.

386. $5(m+1)x + 2 < 3m + 4x$

387. $2(x-m) - (m+1)^2 < 3 - mx$.

388. $\frac{mx+5}{4} - \frac{x-3m}{6} < \frac{2}{3}$

389. $\frac{x+m}{10} + \frac{6x+m}{15} > \frac{mx+2}{6}$.

390. $\frac{12mx-7}{5} + \frac{9x+11m}{2} > m - 4$

391. $\frac{mx+(m-2)^2}{8} + \frac{x+m^2}{12} > \frac{(m-1)(x+1)}{3}$.

— **Résoudre les systèmes d'inéquations simultanées :**

392. $\begin{cases} 2x+5 > 5x-4 \\ x-7 < 2x-3 \end{cases}$

393. $\begin{cases} 9x-15 > 4x+13. \\ 19-5x < 7+3x. \end{cases}$

394. $\begin{cases} \frac{x+5}{6} + \frac{x+9}{8} > \frac{2x+7}{9} \\ \frac{x+5}{4} - \frac{x-3}{6} > \frac{x}{3} \end{cases}$

395. $\begin{cases} \frac{x-1}{3} + \frac{4(2x-3)}{9} < \frac{5x+1}{8} \\ \frac{5x+9}{3} + \frac{7x+5}{9} > \frac{3x+21}{4}. \end{cases}$

396. $\begin{cases} \frac{5x+7}{4} + \frac{3x+5}{8} > \frac{9x+4}{5} \\ \frac{3x-2}{18} + \frac{2x-9}{45} > \frac{3+x}{10} \end{cases}$

397. $\begin{cases} \frac{13x-16}{15} + \frac{x-32}{35} < \frac{x-6}{21} \\ \frac{5x+12}{14} + \frac{11x+28}{2} > \frac{4x+9}{77} \end{cases}$

DOUZIÈME LEÇON

SIGNE DU BINÔME DU PREMIER DEGRÉ

160. Définitions. — ***Un binôme du premier degré en x est une expression algébrique de la forme $ax + b$ dont les coefficients a et b sont des nombres connus.***

Le coefficient a est toujours supposé différent de zéro.

EXEMPLES : $-2x-5$, $-3x+7$, $-4x$.

On appelle racine d'un binôme la valeur x' de x pour laquelle ce binôme est nul.

Ainsi pour $2x-5$, on a : $2x'-5=0$ d'où : $x'=\frac{5}{2}$

En général, la racine de $ax+b$ est $x'=-\frac{b}{a}$.

161. Signe d'un binôme. — Le binôme $2x-5$ prend, pour $x=4$ la valeur numérique $+3$. On dit que ce binôme est positif pour $x=4$.

Il prend pour $x=2$ la valeur numérique -1. Le binôme est négatif pour $x=2$. Les valeurs de x pour lesquelles $2x-5$ est positif sont les solutions de l'inéquation :

$$2x-5>0 \quad \text{ou} \quad x>\frac{5}{2}.$$

Le binôme $2x-5$ est donc positif pour : $x>\frac{5}{2}$.

On voit de même qu'il est négatif pour : $x<\frac{5}{2}$.

On résume ceci par le tableau

x	$-\infty$		$5/2$		$+\infty$
$2x-5$		$-$	0	$+$	

162. Cas général. — ***Le binôme $ax + b$ est du signe du coefficient a pour les valeurs de x supérieures à sa racine et du signe opposé pour les valeurs de x inférieures à sa racine.***

En effet, le binôme s'écrit, puisque $x' = -\frac{b}{a}$

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right) = a(x - x').$$

Le produit $a(x - x')$ est :

du signe de a lorsque $x - x'$ est positif, donc pour $x > x'$;

du signe opposé à celui de a si $x - x'$ est négatif, donc pour $x < x'$.

En résumé :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

163. Signe d'un produit de facteurs du premier degré. — On étudie, suivant les valeurs de x, le signe de chaque facteur et on en déduit le signe du produit.

Exemple. — *Signe du produit* : $P = (x - 3)(2x + 1)(1 - x)$

$x - 3$ est nul pour $x = 3$, positif pour $x > 3$, négatif pour $x < 3$.

$2x + 1$ est nul pour $x = -\frac{1}{2}$, pos. pour $x > -\frac{1}{2}$, nég. pour $x < -\frac{1}{2}$.

$1 - x$ est nul pour $x = 1$, positif pour $x < 1$, négatif pour $x > 1$.

Le produit P est nul pour $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$ et $x = 3$.

Dans l'intervalle $(+ 1, + 3)$ par exemple, le premier facteur est négatif, le second positif et le troisième négatif. Le produit P est donc positif.

Pratiquement, on construit le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1		3	$+\infty$
$x - 3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2x + 1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$1 - x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
P	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

On inscrit sur la première ligne les valeurs remarquables de x, racines des différents facteurs, rangées par ordre croissant. Sur les lignes suivantes on inscrit les résultats relatifs à chacun des facteurs pris isolément. On en déduit les résultats relatifs au produit que l'on inscrit sur la dernière ligne.

164. Remarque. — Le signe du produit change pour chacune des valeurs *remarquables*. Ce signe est donc alternativement + et — dans chacun des intervalles considérés. Il en sera en général ainsi, sauf si deux facteurs ont même racine.

Ainsi le produit $P' = (x-2)(2x-1)(4-2x)$

admet pour valeurs remarquables $+2$, $+\frac{1}{2}$ et $+2$. On obtient :

x	$-\infty$		$1/2$		2		$+\infty$
P'		+	0	—	0	—	

Le premier et le dernier facteur changent tous deux de signe pour $x = 2$, le signe du produit ne change pas. On peut le voir directement car $4 - 2x = -2(x-2)$ et on peut écrire : $P' = -2(2x-1)(x-2)^2$.

Sauf pour $x = 2$, le carré $(x-2)^2$ est positif et n'intervient pas dans le signe du produit qui est celui de $-2(2x-1)$.

165. Signe d'une fraction rationnelle. — Le signe d'une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ est celui du produit A.B. Lorsque A et B sont décomposés en facteurs du premier degré, on est ramené à étudier le signe d'un produit de facteurs du premier degré.

Exemple. — *Signe de :* $F = \dfrac{6x^2 - 10x}{x+1}$.

Cette fraction rationnelle s'écrit : $F = \dfrac{2x(3x-5)}{x+1}$.

Étudions le signe de chacun des binômes $2x$, $3x-5$, et $x+1$, dont les racines sont 0, $\frac{5}{3}$ et -1. On obtient :

x	$-\infty$		-1		0		$5/3$		$+\infty$
$2x$		—		—	0	+		+	
$3x-5$		—		—		—	0	+	
$x+1$		—	0	+		+		+	
F		—	‖	+	0	—	0	+	

On en déduit, sur la dernière ligne, le signe de la fraction suivant les différentes valeurs de x. (Le double trait vertical correspondant à la valeur $x = -1$ indique que pour cette valeur la fraction n'est pas définie.)

*APPLICATIONS AUX INÉQUATIONS

166. Inéquations de la forme A. B. C > 0 (A, B et C étant du premier degré). On étudie le signe du premier membre et on voit immédiatement les valeurs de x pour lesquelles l'inéquation est vérifiée.

EXEMPLE. — *Résoudre l'inéquation*

$$(x-3)(2x+1)(1-x) < 0.$$

Étudions le signe du premier membre, on trouve (v. n° 163) :

x	$-\infty$		$-1/2$		1		3		$+\infty$
$(x-3)(2x+1)(1-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On voit que l'inéquation est vérifiée pour $-\frac{1}{2} < x < 1$ ou $x > 3$.

Soit graphiquement

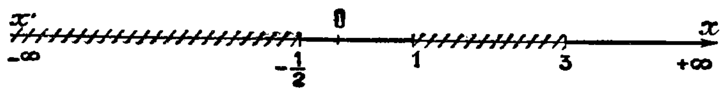


Fig. 19.

— Lorsque le premier membre est un polynôme quelconque, il faut d'abord le décomposer en facteurs du premier degré. On pourra, à titre d'exercice, résoudre les exemples des n°s 143 et 144, en remplaçant le signe $=$ par l'un des signes $>$ ou $<$.

167. Inéquations renfermant l'inconnue en dénominateur.

EXEMPLE I. — *Résoudre l'inéquation* : $\frac{2x(3x-5)}{x+1} < 0.$

Étudions le signe du premier membre. On obtient (v. n° 165)

x	$-\infty$		-1		0		$5/3$		$+\infty$
$\frac{2x(3x-5)}{x+1}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

On voit que l'inéquation est vérifiée pour : $x < -1$ ou $0 < x < \frac{5}{3}$.

EXEMPLE II. — *Résoudre l'inéquation :*

$$\frac{x}{x-2} + \frac{x+2}{x} > 2.$$

Ramenons à la forme précédente. Nous obtenons :

$$\frac{x}{x-2}+\frac{x+2}{x}-2>0.$$

D'où :

$$\frac{x^2}{x(x-2)}+\frac{x^2-4}{x(x-2)}-\frac{2x(x-2)}{x(x-2)}>0$$

$$\frac{x^2+x^2-4-2x^2+4x}{x(x-2)}>0.$$

Soit : $\frac{4(x-1)}{x(x-2)}>0$ ou $\frac{x-1}{x(x-2)}>0.$

Étudions le signe du premier membre. Les valeurs remarquables de x sont 0, 1 et 2. Nous obtenons :

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$\frac{x-1}{x(x-2)}$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$

L'inéquation est donc vérifiée pour $0<x<1$ ou $x>2$.

168. Règle. — *Lorsqu'une inéquation renferme l'inconnue en dénominateur, il faut :*

1° Faire passer tous les termes dans un membre.

2° Réduire l'expression fractionnaire ainsi obtenue.

3° Étudier le signe de cette expression.

4° En déduire les solutions de l'inéquation.

— Remarquons que le signe de la fraction $\frac{A}{B}$ obtenue est le même que celui de A. B, soit de $\frac{A}{B}\times B^2$. *Pour chasser, dans une inéquation, un dénominateur contenant l'inconnue, il faut donc multiplier les deux membres par le carré de ce dénominateur.*

EXERCICES

— Étudier, selon les valeurs de x; le signe des expressions :

398. $(2x-3)(4x+3)$ **399.** $(3x-7)(5-x)$ **400.** $3x(2x+7)(9-3x)$.

401. $4x^2-25$ **402.** $3x^2-12x$ **403.** $4x^2-(x+1)^2$.

404. $(x^2-1)(9-4x^2)$ **405.** x^4-10x^2+9 **406.** $9x^3-9x^2-4x+4$.

407. $\dfrac{2x + 5}{3x - 1}$ **408.** $\dfrac{x(3x + 4)}{4 - 5x}$ **409.** $\dfrac{x^3 - 4x}{(2x + 3)^2 - x^2}$.

— **Résoudre les inéquations :**

410. $2x(3x - 5) > 0$

411. $(2x - 3)(3x - 4)(5x + 2) > 0$.

412. $(3x + 2)(16 - 9x^2) < 0$

413. $(3x + 5)(4x - 1)(9x^2 - 3) < 0$.

414. $(2x + 4)^2 > (x - 1)^2$

415. $25 - 16x^2 > 8x^2 - 10x$.

416. $x^3 - 8 + 2(x - 2)^2 > 0$

417. $(4x + 5)^2 - (2x + 8)^2 < 8x^3 - 27$.

418. $\dfrac{4x(3x + 2)}{2x + 5} > 0$

419. $\dfrac{(4x + 3)(2x - 7)}{5 - x} < 0$.

420. $\dfrac{2x - 5}{3x + 2} < \dfrac{3x + 2}{2x - 5}$

421. $\dfrac{3x + 2}{(x - 1)(x - 2)} < 1$.

422. $\dfrac{3}{x - 3} + \dfrac{4}{x - 5} > \dfrac{7}{x - 4}$

423. $\dfrac{5}{2(3x + 1)} - \dfrac{1}{2x + 3} > \dfrac{1}{3x + 8}$.

424. $\dfrac{5x + 4}{2x + 1} - \dfrac{9x + 2}{6x + 6} < \dfrac{x + 5}{x + 1}$

425. $\dfrac{2x - 7}{2(x - 1)} - 1 > \dfrac{1}{4 - x}$.

— **Résoudre les systèmes d'inéquations simultanées :**

426. $\begin{cases} (2x + 1)^2 - (x + 2)^2 > 0 \\ \dfrac{1}{x + 5} > \dfrac{1}{x - 5} \\ \dfrac{(x - 3)^2}{3} < (x - 1)^2 - 8 \end{cases}$

427. $\begin{cases} (3x + 8)^2 - (x + 4)^2 > 0. \\ \dfrac{4}{x - 4} - \dfrac{3}{x - 3} > \dfrac{1}{x}. \\ \dfrac{x^2 - 5}{x^2 - 1} < 5 \end{cases}$

TREIZIÈME LEÇON

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A DEUX INCONNUES

169. Équation à deux inconnues. — Considérons l'équation du premier degré à deux inconnues

$$2x - 3y = 1 \qquad (1)$$

Fixons-nous la valeur d'une inconnue, par exemple $y = 3$. L'équation proposée devient :

$$2x - 9 = 1.$$

C'est une équation du 1er degré à une inconnue qui donne $x = 5$.

On vérifie que pour le système de valeurs $x = 5$ et $y = 3$ l'équation proposée se transforme en égalité numérique :

$$(2 \times 5) - (3 \times 3) = 1,$$

$x = 5$, $y = 3$ constitue une solution de l'équation (1) (nº 129).

Il est clair qu'en se fixant arbitrairement y on trouvera, par ce procédé, une valeur correspondante de x, donc une solution de l'équation (1). On vérifiera ainsi que :

$$x = 0{,}5 \qquad y = 0$$
$$x = -1 \qquad y = -1$$
$$x = +2 \qquad y = +1 \qquad \text{etc...}$$

sont des solutions de l'équation (1). En général :

Une équation à plusieurs inconnues admet une infinité de solutions.

170. Système de deux équations à deux inconnues. — Considérons les deux équations du premier degré à deux inconnues :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 5y = -27. \end{cases}$$

Leur association forme un ***système de deux équations à deux inconnues.***

Résoudre ce système, c'est trouver les solutions communes aux deux équations qui le composent.

A cet effet, on forme, à partir du système donné, une équation contenant *une seule inconnue.* Il faut donc faire disparaître ou *éliminer* l'autre. Nous utiliserons pour cela deux méthodes.

I. ÉLIMINATION PAR SUBSTITUTION

171. Exemple. — Considérons le système

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 & (1) \\ 3x + 5y = -27. & (2) \end{cases}$$

Dans l'équation (1) calculons y, comme si x était un nombre connu :

$$2x - 1 = 3y$$

et :
$$y = \frac{2x-1}{3}. \quad (3)$$

Dans l'équation (2), remplaçons y par la valeur ainsi trouvée :

$$3x + 5\left(\frac{2x-1}{3}\right) = -27. \quad (4)$$

L'équation (4) contient la seule inconnue x. Nous avons réussi à éliminer y entre les équations (1) et (2). D'autre part, si x et y vérifient le système proposé, l'équation (3) vérifiée en même temps que l'équation (1) montre que y et $\frac{2x-1}{3}$ ont même valeur numérique; l'équation (2) étant vérifiée, il en est de même de l'équation (4). Résolvons cette équation :

$$3x + \frac{10x-5}{3} = -27$$

$$9x + (10x - 5) = -81$$

$$19x = -76$$

et
$$x = -4.$$

Portons $x = -4$ dans l'équation (3); nous obtenons :

$$y = \frac{-8-1}{3} = -3.$$

Donc, si le système proposé admet une solution, c'est :

$$x = -4, \quad y = -3.$$

Vérifions qu'il en est bien ainsi :

$$2 \times (-4) - 3 \times (-3) = +1$$
$$3 \times (-4) + 5 \times (-3) = -27.$$

En général :

172. ***La méthode de substitution consiste à calculer l'une des inconnues dans l'une des équations puis, dans l'autre équation, à substituer à cette inconnue la valeur ainsi trouvée.***

On peut ainsi résoudre le système proposé de quatre façons différentes. On a en effet le choix entre les deux inconnues dans chacune des deux équations. Pratiquement on choisit l'inconnue qui a le plus faible coefficient ou celle qui donne visiblement les calculs les plus simples.

II. ÉLIMINATION PAR ADDITION

173. Exemple I. — *Soit à résoudre le système :*

$$\begin{cases} 4x + 3y = 13 & (1) \\ 5x - 3y = -31. & (2) \end{cases}$$

Les coefficients de y dans les équations (1) et (2) sont symétriques. Additionnons ces deux équations membre à membre, l'équation obtenue est vérifiée si les deux premières le sont. Nous obtenons :

$$9x = -18 \qquad (3)$$

équation à une seule inconnue qui donne :

$$x = -2.$$

Portons cette valeur dans l'équation (1) nous obtenons

$$4(-2) + 3y = 13$$
$$-8 + 3y = 13$$
$$3y = 21 \qquad \text{et} \qquad y = 7.$$

Si la solution du système proposé existe c'est donc :

$$x = -2; \quad y = 7$$

ce qu'il est facile de vérifier : $\begin{cases} -\ \ 8 + 21 = 13 \\ -10 - 21 = -31. \end{cases}$

174. Exemple II. — *Soit le système :*

$$\begin{cases} 9x + 2y = 17 & (1) \\ 6x + 5y = -7. & (2) \end{cases}$$

Les coefficients de y sont $+2$ et $+5$. Nous pouvons les rendre symétriques en multipliant les deux membres de la première équation par $+5$ et ceux de la seconde par -2.

$$\begin{cases} 45x + 10y = 85 & (3) \\ -12x - 10y = 14. & (4) \end{cases}$$

Nous sommes ramenés au cas précédent. L'inconnue y s'élimine par addition

$$33x = 99$$

$$\text{et} \quad x = 3.$$

Portons $x = 3$ dans l'équation (1)

$$27 + 2y = 17$$

$$2y = 17 - 27 = -10.$$

D'où $$y = -5.$$

La solution du système est : $x = +3$; $y = -5$ ce qu'il est facile de vérifier.

— Remarquons que la valeur de y peut aussi se calculer par addition. Les coefficients de x étant 9 et 6 les multiplicateurs 6 et -9 peuvent être simplifiés par 3 et ramenés à 2 et -3. On obtient :

$$\begin{array}{r} 18x + 4y = 34 \\ -18x - 15y = 21 \\ \hline -11y = 55 \end{array} \qquad \text{D'où} \quad y = -5.$$

En résumé :

175. ***La méthode d'addition consiste à multiplier les deux membres de chaque équation par des nombres choisis de telle sorte que les coefficients d'une inconnue deviennent des nombres symétriques. Cette inconnue s'élimine alors par addition.***

Lorsqu'on a obtenu une première inconnue, on peut indifféremment :

1° Appliquer à nouveau la méthode d'addition pour calculer la seconde.

2° Porter la valeur trouvée dans l'une ou l'autre équation du système proposé.

— Lorsque les coefficients d'une des inconnues sont égaux, cette inconnue s'élimine immédiatement en retranchant membre à membre les deux équations.

Ainsi pour : $$\begin{cases} 7x + 5y = 19 \\ 3x + 5y = 31 \end{cases}$$

On obtient $4x = -12$ D'où $x = -3$

et en portant dans la première : $-21 + 5y = 19$

D'où $y = 8$.

176. Remarque. — On peut utiliser le principe précédent pour simplifier les équations d'un système et faciliter sa résolution :

EXEMPLE :
$$\begin{cases} 47x + 34y = 209 & (1) \\ 43x + 26y = 181. & (2) \end{cases}$$

Additionnons membre à membre :

$$90x + 60y = 390.$$

D'où en simplifiant par 30 :

$$3x + 2y = 13. \qquad (3)$$

Retranchons membre à membre les équations (1) et (2)

$$4x + 8y = 28$$

ou
$$x + 2y = 7. \qquad (4)$$

La résolution du système formé par les équations (3) et (4) donne alors sans calculs compliqués : $x = 3$ et $y = 2$.

Ce qui constitue la solution du système proposé.

EXERCICES

Résoudre les systèmes suivants :

428. $\begin{cases} 3x - 7y = -55 \\ 5x + 4y = 18 \end{cases}$ **429.** $\begin{cases} 12x - 5y = 63 \\ 8x - 15y = 77 \end{cases}$ **430.** $\begin{cases} 9x + 10y = 75. \\ 12x + 25y = 135. \end{cases}$

431. $\begin{cases} 12x + 7y = 71 \\ 18x + 13y = 89 \end{cases}$ **432.** $\begin{cases} 9x - 8y = 85 \\ 13x - 12y = 117 \end{cases}$ **433.** $\begin{cases} 5x + 21y = 77. \\ 9x - 14y = 35. \end{cases}$

434. $\begin{cases} 31x - 4y = 495 \\ 18x - 17y = 170 \end{cases}$ **435.** $\begin{cases} 43x + 37y = 263 \\ 23x + 7y = 243 \end{cases}$ **436.** $\begin{cases} 61x - 25y = 640. \\ 49x - 19y = 526. \end{cases}$

437. $\begin{cases} \frac{3x}{4} + \frac{7y}{3} = 41 \\ \frac{5x}{2} - \frac{3y}{5} = 11 \end{cases}$ **438.** $\begin{cases} \frac{5x}{3} - \frac{2y}{5} = 19 \\ 4x + \frac{3y}{2} = 21 \end{cases}$ **439.** $\begin{cases} \frac{9x}{7} - \frac{2y}{3} = -28. \\ \frac{3x}{2} + \frac{12y}{5} = 15. \end{cases}$

440. $\begin{cases} x + y = \frac{4x - 3}{5} \\ x + 3y = \frac{15 - 9y}{14} \end{cases}$ **441.** $\begin{cases} \frac{2x - 5y - 1}{11} + \frac{x - 2y}{3} = 16. \\ \frac{7x + y}{5} + \frac{2(x - 1)}{3} = 31. \end{cases}$

442. $\begin{cases} \dfrac{3x+2y}{4} + \dfrac{6x+5y}{13} = -9 \\ \dfrac{4x-5y+16}{17} = \dfrac{6x+y}{15} \end{cases}$

443. $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{3} + \dfrac{x-y}{4} = 26. \\ \dfrac{4x+2y+1}{7} - \dfrac{x-2}{13} = 22. \end{cases}$

444. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{7} + \dfrac{2x+y}{17} = 7 \\ \dfrac{4x+y}{5} + \dfrac{y-7}{19} = 15 \end{cases}$

445. $\begin{cases} \dfrac{x+y-5}{7} = \dfrac{x-y}{3} + 3. \\ \dfrac{3x+5y}{11} - \dfrac{3x-y}{13} = \dfrac{x+y}{4}. \end{cases}$

446. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{9} + \dfrac{2x-y}{12} = 4 \\ \dfrac{2x-5y}{3} - \dfrac{3x-7y}{11} = -55 \end{cases}$

447. $\begin{cases} \dfrac{5x+9y+30}{5} - \dfrac{x+y}{3} = 80. \\ \dfrac{4x-5(y-1)}{7} + \dfrac{6x+y}{4} = 80. \end{cases}$

448. $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{5} - \dfrac{y}{2} = 4 \\ \dfrac{x+1}{y+2} - 2 = \dfrac{2(x-1)}{y+2} \end{cases}$

449. $\begin{cases} 2(x+1) - \dfrac{y}{4} = 10. \\ \dfrac{2x+3}{3-4x} = \dfrac{x-y+5}{6-2x+2y} \end{cases}$

450. $\begin{cases} \dfrac{(x+3)^2+(y-8)^2}{x^2+y^2+39} = 1 \\ \dfrac{2x+3y+8}{5x+4y-1} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

451. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{y-3} - \dfrac{x+5}{y+1} = \dfrac{3}{(y+1)(y-3)}. \\ \dfrac{2x+y}{15-8x-4y} = \dfrac{4x-y}{5-16x+4y} \end{cases}$

QUATORZIÈME LEÇON

*SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ (suite)

177. Résolution et discussion d'un système de deux équations littérales. — Toute équation du premier degré à deux inconnues x et y renferme un terme du premier degré en x, un terme du premier degré en y et un terme indépendant de x et y. On peut supposer que les deux premiers appartiennent au premier membre, le troisième au second membre de l'équation qui est alors de la forme :

$$ax + by = c.$$

La forme générale d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues est donc la suivante :

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

où les coefficients a, b, c, a', b', c' sont supposés connus.

Employons la méthode de substitution :

I. L'un au moins des coefficients a, b, a', b' **est différent de zéro.**

Supposons par exemple $a \neq 0$. De l'équation (1) on tire, la division par a étant possible :

$$x = \frac{c - by}{a}. \qquad (3)$$

Dans l'équation (2) substituons à x la valeur égale $\frac{c - by}{a}$:

$$a' \frac{c - by}{a} + b'y = c' \qquad (4)$$

équation qui contient la seule inconnue y. Cette équation s'écrit :

$$a'c - a'by + ab'y = ac'$$

ou

$$y(ab' - a'b) = ac' - a'c. \qquad (5)$$

1° $ab' - a'b \neq 0$.

Nous obtenons, la division par $ab' - a'b$ étant possible :

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

Nous trouverons x en portant cette valeur dans l'équation (3) :

$$x = \frac{c - b\,\dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b}}{a} = \frac{c(ab' - a'b) - b(ac' - a'c)}{a(ab' - a'b)} = \frac{cab' - bac'}{a(ab' - a'b)}$$

soit, en simplifiant : $x = \dfrac{cb' - c'b}{ab' - a'b}$.

Si le système proposé admet une solution, c'est :

$x = \dfrac{cb' - c'b}{ab' - a'b}$	$y = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$

Vérifions qu'il en est bien ainsi :

$$a\,\frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} + b\,\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} = \frac{acb' - ba'c}{ab' - a'b} = c$$

$$a'\,\frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} + b'\,\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} = \frac{-a'c'b + b'ac'}{ab' - a'b} = c'.$$

Remarquons que l'hypothèse $ab' - a'b \neq 0$ nécessite que deux coefficients a et b' ou a' et b, soient différents de zéro. On peut alors appliquer dans ce cas la méthode d'addition pour obtenir plus rapidement les valeurs de x et de y trouvées ci-dessus.

2° $ab' - a'b = 0$.

L'équation (5) devient alors :

$$0y = ac' - a'c.$$

a) Si $ac' - a'c \neq 0$ cette équation n'a pas de solution et le système proposé est *impossible*. Remarquons qu'on peut alors écrire

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c}.$$

b) Si $ac' - a'c = 0$, l'équation (5) est vérifiée pour toute valeur de y. La valeur correspondante de x est donnée par l'équation (3).

Les conditions $ab' - a'b = 0$ et $ac' - a'c = 0$ donnent

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

ce qui prouve que l'équation (2) s'obtient en multipliant les deux membres

de (1) par un même nombre. Le système se réduit à *une seule équation* et admet une infinité de solutions (nº 137). On dit qu'il est *indéterminé*.

II. Les coefficients a, b, a', b', sont tous nuls.

On ne peut plus employer la méthode de substitution; le système devient :

$$\begin{cases} 0x + 0y = c & (1) \\ 0x + 0y = c'. & (2) \end{cases}$$

1º Si $c \neq 0$ ou $c' \neq 0$ le système est *impossible*, car les premiers membres des équations (1) et (2) sont nuls alors que les seconds ne le sont pas.

2º Si $c = 0$ et $c' = 0$ tout nombre x arbitraire et tout nombre y arbitraire satisfont au système qui est indéterminé.

178. Résumé. — Les résultats de la discussion précédente sont rassemblés dans le tableau suivant :

I. a, b, a' ou $b' \neq 0$	1º $ab' - a'b \neq 0$	*Solution unique*	$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}$, $y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$
	2º $ab' - a'b = 0$	$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c}$	*impossibilité*
		$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$	*indétermination*
II. $a = a' = b = b' = 0$	1º c ou $c' \neq 0$	*impossibilité*	
	2º $c = c' = 0$	*indétermination.*	

Comme la condition $ab' - a'b \neq 0$ exclut le cas où les quatre coefficients a, b, a', b' sont nuls, la lecture du tableau conduit au théorème suivant :

179. Théorème. — ***Pour que le système général de deux équations du premier degré à deux inconnues ait une solution unique, il faut et il suffit que l'on ait :***

$$\boxed{ab' - a'b \neq 0}$$

180. Exemple de système impossible.

Soit:

$$\begin{cases} 6x + 9y = 7 \\ 4x + 6y = 5. \end{cases}$$

Éliminons y en additionnant membre à membre après avoir multiplié la première équation par -2 et la seconde par 3. Nous obtenons :

$$0x = 1.$$

Cette équation est impossible. Il en est de même du système proposé, ce qu'on pouvait prévoir car :

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9} \neq \frac{5}{7}.$$

181. Exemple de système indéterminé.

Soit :
$$\begin{cases} 6x - 2y = 4 \\ 15x - 5y = 10. \end{cases}$$

Après simplification, les deux équations se réduisent à l'équation unique :

$$3x - y = 2.$$

Le système est donc indéterminé.

182. Exemples de discussion d'un système littéral. — Lorsque les coefficients des équations d'un système dépendent de lettres supposées connues, et appelées *paramètres*, il est bon de déterminer les valeurs de ces paramètres pour lesquelles le système est possible, impossible ou indéterminé. On peut utiliser les résultats du tableau de discussion du n° 178 ou opérer directement, ce qui est souvent plus simple.

183. Exemple I. — *Résoudre et discuter le système en* x et y :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 & (1) \\ (m+1)\,x + y = 2 & (2) \end{cases}$$

Eliminons y entre les deux équations par la méthode d'addition :

$$\begin{array}{r} -2x - 3y = -5 \\ (3m+3)x + 3y = 6 \\ \hline (3m+1)x \qquad = 1 \end{array} \qquad (3)$$

1° Si $3m + 1 \neq 0$, soit $m \neq -\frac{1}{3}$ on a : $\quad x = \dfrac{1}{3m+1}$

en portant dans la première équation on a : $\quad y = \dfrac{5m+1}{3m+1}.$

2° Si $m = -\frac{1}{3}$ l'équation (3) donne : $0x = 1$. Le système est impossible.

L'équation (2) qui s'écrit alors : $2x + 3y = 6$ est manifestement incompatible avec l'équation (1).

184. Exemple II. — *Résoudre et discuter le système*

$$\begin{cases} x - my = m^2 & (1) \\ x - py = p^2. & (2) \end{cases}$$

Retranchons membre à membre les deux équations, x s'élimine et nous obtenons :

$$y(p - m) = m^2 - p^2. \qquad (3)$$

1° Si $p - m \neq 0$, c'est-à-dire si $m \neq p$, on a :

$$y = \frac{m^2 - p^2}{p - m} = \frac{(m+p)(m-p)}{p-m} = -(m+p)$$

et d'après (1) : $x = -m(m+p) + m^2 = -mp$.

2° Si $m = p$, l'équation (3) devient $0y = 0$, donc indétermination.

On peut vérifier qu'on a alors : $\frac{1}{1} = \frac{-m}{-p} = \frac{m^2}{p^2}$.

Les deux équations sont identiques et toute solution de l'une est solution du système.

185. Problème. — *Pour quelles valeurs de* m *le système :*

$$\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ mx + my = m - 1 \end{cases}$$

est-il possible, impossible ou indéterminé?

La condition de possibilité du n° 178 s'écrit ici :

$m^2 - 2m \neq 0$ ou $m(m-2) \neq 0$ soit $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2. \end{cases}$

1° Si $m \neq 0$ et $m \neq 2$ le système est possible.

2° Si $m = 0$ le système devient $\begin{cases} 2y = 1 \\ 0 = -1 \end{cases}$

donc impossibilité.

3° Si $m = 2$ le système devient $\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 2x + 2y = 1. \end{cases}$

Il se réduit à une seule équation, donc indétermination.

EXERCICES

Résoudre et discuter les systèmes suivants :

452. $\begin{cases} 2mx + 3y = 5 \\ (m+1)x + y = 2 \end{cases}$ 453. $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$

454. $\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 2mx + (m-1)y = m + 1 \end{cases}$ 455. $\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ (m-2)x + my = m - 1 \end{cases}$

456. $\begin{cases} x + my = 3m \\ mx - y = m^2 - 2 \end{cases}$ 457. $\begin{cases} x - my = 1 + m^2 \\ mx + y = 1 + m^2 \end{cases}$

458. $\begin{cases} 3x - 2y = m \\ (m-3)x - y = 1 - m \end{cases}$

459. $\begin{cases} x + y = m - 2 \\ (m+2)x - 4y = m^2 - 4 \end{cases}$

460. $\begin{cases} 2x - y = 3 + 2m \\ mx + y = (m+1)^2 \end{cases}$

461. $\begin{cases} mx - y = 2m + 1 \\ (2m+1)x - 4y = 4m + 3 \end{cases}$

462. $\begin{cases} ax + by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = 2ab \end{cases}$

463. $\begin{cases} ax - y = a^2 \\ bx - y = b^2 \end{cases}$

464. $\begin{cases} mx - py = m^2 - p^2 \\ px + my = 2mp \end{cases}$

465. $\begin{cases} px + my = p - m \\ mx - py = p + m \end{cases}$

466. $\begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = 2a \\ (a^2+b^2)x + (a^2-b^2)y = 2a^2 \end{cases}$

467. $\begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = 2 \\ (a^3+b^3)x + (a^3-b^3)y = 2(a^2+b^2) \end{cases}$

468. $\begin{cases} \dfrac{x}{x-a} - \dfrac{y}{y-b} = 0 \\ ax - by = a - b \end{cases}$

469. $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = 2 \\ x + y = 2a \end{cases}$

470. $\begin{cases} mx + py = 2mp \\ \dfrac{x}{x-m} + \dfrac{y}{y-p} = 2 \end{cases}$

471. $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = a + b \\ x - y = a^2 + b^2. \end{cases}$

QUINZIÈME LEÇON

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS A PLUSIEURS INCONNUES

186. Système de trois équations à trois inconnues. — Les méthodes de substitution et d'addition s'étendent à la résolution de systèmes de trois équations du premier degré à trois inconnues.

EXEMPLE. — *Résoudre le système*

$$\begin{cases} 3x + 5y - 3z = 34 & (1) \\ 4x - 7y + \ \ z = 3 & (2) \\ 2x + 3y - 2z = 22 & (3) \end{cases}$$

1° PAR SUBSTITUTION. — Calculons z dans l'équation (2) et portons sa valeur dans les équations (1) et (3); nous obtenons :

$$\begin{cases} z = 3 - 4x + 7y \\ 3x + 5y - 3(3 - 4x + 7y) = 34 \\ 2x + 3y - 2(3 - 4x + 7y) = 22 \end{cases}$$

Soit, après réduction :

$$\begin{cases} z = 3 - 4x + 7y & (4) \\ 15x - 16y = 43 & (5) \\ 10x - 11y = 28 & (6) \end{cases}$$

Les équations (5) et (6) forment un système de deux équations à deux inconnues. Résolvons-le :

$$\begin{array}{r} 30x - 32y = 86 \\ -30x + 33y = -84 \\ \hline y = 2 \end{array} \qquad \text{et d'après (5)} \quad x = 5.$$

En portant les valeurs $y = 2$ et $x = 5$ dans l'équation (4) nous trouvons $z = -3$.

Le système admet pour solution $x = 5, y = 2, z = -3$, ce qu'il est facile

de vérifier. La méthode de substitution a permis de ramener la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues à celle d'un système de deux équations à deux inconnues. Ceci est général :

En calculant une des inconnues dans une des équations et en portant la valeur ainsi trouvée dans les autres équations, la résolution d'un système de n *équations du premier degré à* n *inconnues se ramène à la résolution d'un système de* n — 1 *équations à* n — 1 *inconnues.*

Ainsi la résolution d'un système de quatre équations à quatre inconnues se ramène à celle d'un système de trois équations à trois inconnues, etc...

2° Par addition. — Éliminons z entre les équations (1) et (2), puis entre les équations (2) et (3).

$$\begin{array}{rl} 3x + 5y - 3z = 34 & (1) \\ 12x - 21y + 3z = 9 & (2) \\ \hline 15x - 16y \quad = 43 & (5) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 8x - 14y + 2z = 6 & (2) \\ 2x + 3y - 2z = 22 & (3) \\ \hline 10x - 11y \quad = 28 & (6) \end{array}$$

Nous sommes conduits, comme précédemment, à résoudre le système formé par les équations (5) et (6). On trouve : $x = 5$ et $y = 2$ et en portant ces valeurs dans (2) $z = -3$.

187. Remarques. — 1° Il faut de préférence utiliser les simplifications qui peuvent se présenter. Ainsi si une équation ne contient pas x, l'élimination de x entre les deux autres donnera un système de deux équations en y et z.

Si une équation ne contient pas x et si une autre ne contient pas y, on pourra calculer y dans la première, et x dans la seconde en fonction de z. En portant ces valeurs dans la troisième on aura tout de suite la valeur de z.

2° On peut aussi, comme au n° 176, combiner par addition les équations d'un système, de façon à les simplifier. En particulier lorsque les équations d'un système présentent une certaine symétrie, on obtient, en les additionnant membre à membre, une équation qui en facilite souvent la résolution.

Exemple. — *Résoudre le système* :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 23 \\ x + 2y + z = 20 \\ x + y + 2z = 17. \end{cases}$$

Additionnons membre à membre :

$$4x + 4y + 4z = 60$$

D'où en simplifiant : $x + y + z = 15.$

Retranchons membre à membre cette équation des différentes équations du système proposé. Nous obtenons immédiatement :

$$x = 8, \quad y = 5 \quad \text{et} \quad z = 2$$

ce qui constitue la solution du système proposé, ainsi qu'il est facile de le vérifier.

SYSTÈMES PARTICULIERS

188. Les inconnues sont proportionnelles à des nombres donnés.

EXEMPLE. — *Résoudre le système*

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} & (1)\ (2) \\ 5x - 3y + z = 6. & (3) \end{cases}$$

Les deux premières équations se ramènent facilement à :

$$5x - 2y = 0 \quad \text{et} \quad 7x - 2z = 0$$

et on pourrait appliquer la méthode du n° 186. Il est plus élégant d'opérer d'une façon plus symétrique. Désignons par t la valeur commune des rapports $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{5}$, et $\frac{z}{7}$. On obtient :

$$x = 2t, \quad y = 5t \quad \text{et} \quad z = 7t. \qquad (4)$$

Portons ces valeurs dans l'équation (3) :

$$10t - 15t + 7t = 6.$$

Donc $$2t = 6 \quad \text{et} \quad t = 3.$$

Ce qui donne en portant cette valeur dans les relations (4) :

$$x = 6, \quad y = 15 \quad \text{et} \quad z = 21.$$

189. Remarque. — On peut également utiliser les propriétés des rapports égaux (n° 54) et écrire :

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{5x - 3y + z}{5 \times 2 - 3 \times 5 + 7} = \frac{5x - 3y + z}{10 - 15 + 7} = \frac{6}{2} = 3.$$

On obtient ainsi immédiatement la valeur des rapports $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{5}$, et $\frac{z}{7}$, et on en déduit :

$$x = 3 \times 2 = 6 \quad y = 3 \times 5 = 15 \quad \text{et} \quad z = 3 \times 7 = 21.$$

190. Applications. — ***Trouver deux nombres connaissant leur rapport et leur somme ou leur différence.***

Si deux nombres x et y ont pour rapport $\frac{5}{7}$ et pour somme 72 ils vérifient le système :

$$\begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{7} \\ x + y = 72 \end{cases}$$

on en déduit : $\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{5+7} = \frac{72}{12} = 6.$

D'où $x = 6 \times 5 = 30$ et $y = 6 \times 7 = 42.$

— De même si on a : $\frac{x}{y} = \frac{8}{5}$ et $x - y = 21.$

On en déduit : $\frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{x-y}{8-5} = \frac{21}{3} = 7.$

Donc $x = 7 \times 8 = 56$ et $y = 7 \times 5 = 35.$

2° ***Partager un nombre en parties proportionnelles à des nombres donnés.*** — Soit à partager 110 en 3 nombres x, y et z proportionnels à 2, 3 et 5.

Nous avons : $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \\ x + y + z = 110. \end{cases}$

Nous pouvons écrire :

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{110}{10} = 11.$$

Donc : $x = 11 \times 2 = 22$; $y = 11 \times 3 = 33$; $z = 11 \times 5 = 55.$

191. Changement d'inconnues. — Lorsqu'un système n'est pas du premier degré, on peut parfois l'y ramener par un changement d'inconnues.

EXEMPLE. — *Résoudre le système :*

$$\text{I} \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 13 & (1) \\ \frac{5}{x} - \frac{3}{y} = -31 & (2) \end{cases}$$

Posons : $\frac{1}{x} = X$ et $\frac{1}{y} = Y$. Le système devient:

$$\text{II} \begin{cases} 4X + 3Y = 13 \\ 5X - 3Y = -31. \end{cases}$$

Ce système est du premier degré en X et Y. On obtient facilement par addition

$$9X = -18 \qquad \text{donc } X = -2$$

et $-8 + 3Y = 13$ donc $Y = 7.$

On a donc : $\frac{1}{x} = -2$ et $x = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{y} = 7$ et $y = \frac{1}{7}.$

192. Cas où il y a plus d'inconnues que d'équations.

Considérons le système $\begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 2x + y - 3z = 5. \end{cases}$

En donnant à z une valeur quelconque -5, $+2$, $+7$ etc... on obtient un système de deux équations à deux inconnues que l'on peut résoudre.

Une des inconnues est donc arbitraire et le système admet une infinité de solutions.

193. Cas où il y a plus d'équations que d'inconnues.

Considérons le système $\begin{cases} x + y = 10 & (1) \\ x - y = 2 & (2) \\ 3x + 5y = 13 & (3) \end{cases}$

Le système formé par les équations (1) et (2) admet pour solution

$$x = 6 \qquad \text{et} \qquad y = 4.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (3) : le premier membre devient 38. L'équation (3) ne peut donc être vérifiée en même temps que les deux premières : ***Le système est impossible.***

Si l'équation (3) était $3x + 5y = 38$, le système admettrait la solution précédente. Dans ce cas les équations (1), (2) et (3) sont dites ***compatibles.***

EXERCICES

Résoudre les systèmes :

472. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 24 \\ 4x - 2y + 3z = 6 \\ 6x - y + 2z = 22 \end{cases}$

473. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 8 \\ x + 3y + 9z = 27. \end{cases}$

474. $\begin{cases} 3x + y + z = 30 \\ x + 3y + z = 34 \\ x + y + 3z = 36 \end{cases}$

475. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ 4x - 5y + z = 14 \\ 9x - y - 6z = 19. \end{cases}$

476. $\begin{cases} \dfrac{4x}{3} - \dfrac{3y}{2} - 2z = 0 \\ \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{4} - \dfrac{z}{2} = 3 \\ \dfrac{2x}{3} - \dfrac{7y}{4} + z = 0 \end{cases}$

477. $\begin{cases} \dfrac{x + 3y}{5} + \dfrac{y + z}{6} = z \\ \dfrac{2x + 5}{7} + \dfrac{4z + 5}{3} = z + 1 \\ \dfrac{3y + 7}{8} + \dfrac{2z + 1}{3} = y - 1. \end{cases}$

478. $\begin{cases} \dfrac{5x}{4} - \dfrac{3y}{5} + \dfrac{z}{2} = 15 \\ \dfrac{x}{3} + 2y - \dfrac{7z}{6} = 7 \\ x - \dfrac{7y}{5} - \dfrac{5z}{6} = 0 \end{cases}$

479. $\begin{cases} \dfrac{2x - y}{4} + \dfrac{x - 3z}{3} = 6 \\ \dfrac{4x + y}{3} - \dfrac{x - z}{5} = 10 \\ \dfrac{5x + z}{4} + \dfrac{4x + z}{5} = 13 \end{cases}$

480. $\begin{cases} x + y + z = 23 \\ y + z + t = 31 \\ z + t + x = 27 \\ t + x + y = 33 \end{cases}$ 481. $\begin{cases} y + z - x = 4 \\ z + t - y = 14 \\ t + x - z = 20 \\ x + y - t = 7. \end{cases}$

— Résoudre les systèmes :

482. $\begin{cases} \dfrac{x}{13} = \dfrac{y}{8} \\ x + y = 126 \end{cases}$ 483. $\begin{cases} \dfrac{x}{11} + \dfrac{y}{7} = 0 \\ 3x + 2y = 57 \end{cases}$ 484. $\begin{cases} \dfrac{x-5}{7} = \dfrac{y-4}{5} \\ 2x + 3y = 109 \end{cases}$

485. $\begin{cases} \dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z}{2} \\ x + y + z = 85 \end{cases}$ 486. $\begin{cases} \dfrac{x}{12} = \dfrac{y}{-15} = \dfrac{z}{20} \\ x + y + z = 119 \end{cases}$ 487. $\begin{cases} \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{2} \\ x + y + z = 84 \end{cases}$

488. $\begin{cases} \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z}{13} \\ x + 2y + 3z = 174 \end{cases}$ 489. $\begin{cases} \dfrac{x}{4} = \dfrac{-y}{17} = \dfrac{z}{9} \\ 7x + 3y + 2z = 25 \end{cases}$

490. $\begin{cases} \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+9}{13} = \dfrac{z}{-2} \\ 2x + y - 3z = 142 \end{cases}$ 491. $\begin{cases} \dfrac{2x-7}{3} = \dfrac{3y+1}{2} = \dfrac{6z-1}{7} \\ 3x + 2y - z = 61 \end{cases}$

— Résoudre les systèmes :

492. $\begin{cases} \dfrac{5}{x} - \dfrac{6}{y} = 3 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{9}{y} = 7 \end{cases}$ 493. $\begin{cases} \dfrac{6}{x} + \dfrac{5}{y} = 4 \\ \dfrac{14}{x} - \dfrac{3}{y} = 2 \end{cases}$ 494. $\begin{cases} \dfrac{3}{2x} + \dfrac{2}{5y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5}{2x} - \dfrac{7}{3y} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

495. $\begin{cases} \dfrac{12}{x-3} - \dfrac{5}{y+2} = 63 \\ \dfrac{8}{x-3} + \dfrac{15}{y+2} = -13 \end{cases}$ 496. $\begin{cases} \dfrac{4}{2x-1} + \dfrac{3}{2(3y+2)} = 21 \\ \dfrac{5}{6x-3} - \dfrac{2}{15y+10} = 19 \end{cases}$

497. $\begin{cases} -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = -6 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 10 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} = 0 \end{cases}$ 498. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y-2} + \dfrac{1}{z-3} = 1 \\ \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{y-2} + \dfrac{4}{z-3} = 6 \\ \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{y-2} + \dfrac{9}{z-3} = 27 \end{cases}$

499. Déterminer a et b pour que le système en x et y suivant :

$$(2a - 1)x + by = 7$$
$$(a - 2)x + (b - 1)y = 2$$

admette pour solution $x = 1$; $y = -1$.

500. Déterminer m pour que le système en x et y suivant soit possible

$$\begin{cases} x + y = m \\ 11x + 40y = 4m + 37 \\ 21x + 120y = 12m + 171. \end{cases}$$

SEIZIÈME LEÇON

PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ

194. Problème à une inconnue. — ***Quel nombre entier faut-il ajouter aux deux termes de la fraction $\frac{3}{5}$ et retrancher aux deux termes de la fraction $\frac{3}{4}$ pour obtenir deux fractions égales?***

Désignons par x le nombre *entier et positif* inconnu. Nous avons :

$$\frac{3+x}{5+x} = \frac{3-x}{4-x}.$$

L'inconnue satisfait à cette équation. Les divisions qui figurent dans chaque membre sont-elles possibles? La première l'est car x étant positif, $5 + x$ ne peut être nul. La seconde est impossible pour $x = 4$.

Toute racine entière, positive et différente de 4, de cette équation, est une solution du problème.

Faisons le produit des extrêmes et celui des moyens, nous obtenons :

$$(3 + x)(4 - x) = (3 - x)(5 + x)$$

ou : $$-x^2 + 4x - 3x + 12 = -x^2 - 5x + 3x + 15$$

soit : $$x + 12 = -2x + 15$$

$$3x = 3$$

et $$x = 1.$$

Cette racine est la solution du problème.

Vérification : $\frac{3+1}{5+1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $\frac{3-1}{4-1} = \frac{2}{3}.$

195. Problème à deux inconnues. — ***On considère un rectangle dont le périmètre mesuré en mètres est*** $2p$. ***Si l'on augmente la base de*** 3 ***mètres et la hauteur de*** 2 ***mètres la surface augmente de*** 246 ***mètres carrés. Trouver les dimensions du rectangle. Discuter par rapport à*** p.

Désignons par x et y les dimensions du rectangle évaluées en mètres. Son demi-périmètre est p, donc :

$$x + y = p. \qquad (1)$$

L'aire du rectangle en m² est xy. Si l'on augmente la base de 3 mètres et la hauteur de 2 mètres, cette aire devient $(x + 3)(y + 2)$. Donc :

$$(x + 3)(y + 2) - xy = 246 \qquad (2)$$

x et y satisfont au système :

$$\begin{cases} x + y = p & (1) \\ 2x + 3y = 240. & (2) \end{cases}$$

Réciproquement, toute solution de ce système où x et y sont *deux nombres positifs* est une solution du problème.

La résolution du système donne :

$$x = 3p - 240; \qquad y = 240 - 2p.$$

Ces valeurs sont acceptables si :

1° $3p - 240 > 0$ soit $p > 80$.

2° $240 - 2p > 0$ soit $p < 120$.

En définitive, le problème admet une solution si :

$$80 < p < 120.$$

Par exemple, pour $p = 100$ on trouve $x = 60$ et $y = 40$.

196. Problème à trois inconnues. — ***Un cycliste parcourt un trajet*** AB ***qui comporte des montées, des paliers et des descentes. Les vitesses sont*** 10 km. ***à l'heure en montée,*** 20 km. ***à l'heure en palier,*** 30 km. ***à l'heure en descente. Dans le sens*** AB ***il met*** 6 h. 50 m.; ***dans le sens*** BA ***il met*** 7 h. 30 m. ***Le trajet*** AB ***comportant*** 120 km. ***on demande la longueur des montées, des paliers et des descentes.***

Désignons par x la longueur totale des paliers, par y celle des montées dans le sens AB, par z celle des descentes, ces distances étant exprimées en kilomètres. Exprimons les temps en heures, donc les vitesses en kilomètres à l'heure.

La distance AB est 120 km :

$$x + y + z = 120. \qquad (1)$$

La durée du trajet AB est 6 h. 50 m. ou 6 h. $\frac{5}{6}$ ou $\frac{41}{6}$ d'heure :

$$\frac{x}{20} + \frac{y}{10} + \frac{z}{30} = \frac{41}{6}. \qquad (2)$$

Dans le sens BA, les montées deviennent descentes et inversement les descentes deviennent montées. La durée du trajet BA est 7 h. $\frac{1}{2}$ soit $\frac{15}{2}$ heures.

$$\frac{x}{20} + \frac{y}{30} + \frac{z}{10} = \frac{15}{2}. \qquad (3)$$

En prenant 60 pour dénominateur commun dans les équations (2) et (3) nous sommes conduits au système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 120 & (1) \\ 3x + 6y + 2z = 410 & (2) \\ 3x + 2y + 6z = 450 & (3) \end{cases}$$

Réciproquement, toute solution de ce système où x, y et z sont des nombres positifs est une solution du problème.

Eliminons x entre (2) et (3) : $4y - 4z = -40$

soit $y - z = -10.$ (4)

Eliminons x entre (1) et (3) :

$$\begin{array}{r} -3x - 3y - 3z = -360 \\ 3x + 2y + 6z = 450 \\ \hline -y + 3z = 90 \end{array} \qquad (5)$$

Résolvons le système formé par les équations (4) et (5); on trouve :

$y = 30$, $z = 40$ et en portant dans (1) : $x = 50$.

On pourra vérifier que cette solution convient au problème.

197. Remarques générales. — Des exemples qui précèdent il résulte que la solution algébrique d'un problème comporte :

1° ***Le choix de l'inconnue ou des inconnues.*** On doit choisir les inconnues de telle façon que leur détermination entraîne la solution du problème. Ne pas craindre de choisir plus d'inconnues que n'en comporte l'énoncé ou une ou plusieurs inconnues auxiliaires, si cela facilite la mise en équation et la résolution.

2° ***La mise en équation.*** Elle consiste à traduire l'énoncé par des égalités où entrent les données et les inconnues. *Il faut autant d'équations distinctes que d'inconnues.* Il faut aussi chercher ***quelles sont les conditions pour que toute solution de l'équation ou du système obtenu soit une solution du problème.***

Choisir un système d'unités cohérent; par exemple si les distances sont exprimées en kilomètres et les temps en heures exprimer les vitesses en kilomètres à l'heure.

3° ***La résolution de l'équation ou du système obtenu.*** C'est la partie purement algébrique du problème.

4° **la discussion.** Dans le cas où les données sont littérales on doit chercher les valeurs des paramètres, pour lesquelles l'équation ou le système est possible et pour lesquelles la solution trouvée convient au problème.

198. Problème de géométrie. — ***Soit un triangle*** ABC ***de côtés*** a, b ***et*** c. ***On suppose*** $b > c$. ***Déterminer sur le côté*** BC ***un point*** M ***tel qu'en menant les parallèles*** MP ***et*** MQ ***aux côtés*** AC ***et*** AB ***on ait*** MP + MQ = l ***où*** l ***désigne une longueur donnée*** (fig. 20).

Fig. 20.

1° Choix de l'inconnue. Posons BM = x. La connaissance de la longueur x permet de placer le point M sur le segment BC pourvu que $0 \leq x \leq a$.

2° Mise en équation. Les triangles semblables BMP et BCA donnent :

$$\frac{MP}{CA} = \frac{BM}{BC} \quad \text{ou} \quad \frac{MP}{b} = \frac{x}{a} \quad \text{soit} \quad MP = \frac{bx}{a}.$$

Les triangles semblables CMQ et CBA donnent de même :

$$\frac{MQ}{BA} = \frac{CM}{CB} \quad \text{ou} \quad \frac{MQ}{c} = \frac{a-x}{a} \quad \text{soit} \quad MQ = \frac{c(a-x)}{a}.$$

La condition MP + MQ = l s'écrit donc :

$$\frac{bx}{a} + \frac{c(a-x)}{a} = l. \qquad (1)$$

3° Résolution de l'équation. Comme $a \neq 0$ l'équation s'écrit :

$$bx + ca - cx = al$$

ou

$$x(b-c) = a(l-c)$$

et puisque $b > c$ on a $b - c \neq 0$, donc :

$$x = \frac{a(l-c)}{b-c}. \qquad (2)$$

4° Discussion. Il faut s'assurer que la double condition

$$0 \leqslant x \leqslant a$$

est satisfaite :

a) $x \geqslant 0$ ou : $\dfrac{a(l-c)}{b-c} \geqslant 0.$

$b - c$ et a étant positifs cette condition s'écrit

$$l - c \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad l \geqslant c.$$

b) $x \leqslant a$ ou $\dfrac{a(l-c)}{b-c} \leqslant a$

ce qui donne puisque a et $b-c$ sont positifs :

$$\frac{l-c}{b-c} \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad l-c \leqslant b-c \qquad \text{soit} \qquad l \leqslant b.$$

En définitive le problème admet une solution unique donnée par la formule (2) si

$$c \leqslant l \leqslant b.$$

5° Solution géométrique. Menons par le point M la perpendiculaire à la bissectrice intérieure de l'angle BAC de façon à obtenir le triangle isocèle AKL (fig. 21). On voit immédiatement que :

$$AK = AP + PK = MQ + MP = l.$$

D'où la construction : Porter à partir de A sur AB et AC, les segments $AK = AL = l$. Le segment KL coupe BC au point M cherché. Le problème n'est possible que si KL coupe BC et non son prolongement, c'est-à-dire si $AK \geqslant AB$ et $AL \leqslant AC$, ce qui donne la condition déjà trouvée :

$$c \leqslant l \leqslant b.$$

Fig. 21.

EXERCICES

501. Quel nombre x faut-il ajouter aux deux termes de la fraction $\frac{a}{b}$ pour obtenir une fraction égale à $\frac{c}{d}$? Application numérique : $\frac{a}{b} = \frac{14}{17}$; $\frac{c}{d} = \frac{8}{9}$.

502. Quel nombre x faut-il à la fois ajouter au numérateur et retrancher au dénominateur de la fraction $\frac{a}{b}$ pour obtenir une fraction égale à $\frac{c}{d}$?

Application : $\frac{a}{b} = \frac{11}{21}$; $\frac{c}{d} = 1$.

503. Trouver deux nombres connaissant leur somme s et sachant que la division du premier par le second donne q comme quotient et r pour reste. Application : $s = 260$; $q = 14$; $r = 5$.

504. Trouver un nombre de deux chiffres sachant que la somme de ses chiffres est 12 et qu'en permutant les 2 chiffres le nombre diminue de 18.

505. Un nombre N a 3 chiffres. Le chiffre des dizaines est double de celui des unités; la somme des 3 chiffres est 11; enfin en retranchant de N le nombre N' obtenu en intervertissant dans N le chiffre des centaines et celui des unités, on trouve 297. Trouver N.

506. On groupe un nombre inconnu d'oranges en 63 tas égaux et il reste 1 orange. Avec 47 oranges de plus on peut faire exactement 67 tas égaux aux premiers. Trouver le nombre d'oranges dans chaque tas et le nombre total des oranges.

507. Trois joueurs ont des avoirs proportionnels aux nombres 2, 3 et 4. En fin de partie leurs avoirs sont proportionnels aux nombres 17, 13 et 15. Sachant que le premier a gagné 560 francs, trouver les avoirs primitifs et les avoirs finaux.

508. Soit le x côté d'un carré exprimé en mètres. Si ce côté augmente de a mètres, son aire augmente de b mètres carrés. Trouver x. Application : $a = 7$; $b = 1771$.

509. Le périmètre d'un rectangle vaut $2p$. Si la base augmente de a, et la hauteur de b, l'aire augmente de k. Trouver les côtés du rectangle. Application : $p = 216$; $a = +2$; $b = -3$; $k = -289$.

510. Deux mobiles animés d'un mouvement rectiligne et uniforme se déplacent sur la même droite. A l'instant initial ils sont séparés par une distance d. Leurs vitesses sont v et v'.

1° Les mobiles vont dans le même sens. Trouver le temps x au bout duquel l'un aura rejoint l'autre.

2° Les mobiles vont en sens contraires. Trouver le temps x au bout duquel ils se rencontreront.

Application : $d = 45$ km; $v = 36$ km/heure; $v' = 24$ km/heure.

511. Deux mobiles sont, à l'instant initial, séparés par une distance d sur une droite uv. Ils sont animés, sur cette droite, d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesses respectives x et y. Si les mobiles vont dans le même sens ils se rejoignent au bout du temps t; s'ils vont en sens contraires ils se rencontrent au bout du temps t'. Calculer x et y en fonction de d, t et t'.

Application : $d = 36$ km.; $t' = 40$ minutes; $t = 6$ heures.

512. Un piéton part de A pour B à la vitesse de 4 km. à l'heure. Un autocar part de A 1 h. 30 m. plus tard à la vitesse moyenne de 28 km. à l'heure. Le piéton monte dans cet autocar lorsqu'il arrive à sa hauteur et arrive ainsi en B trois heures plus tôt que s'il avait terminé le chemin à pied.

1° Trouver la distance AB.

2° A quelle distance de A le piéton a-t-il pris l'autocar?

513. Deux capitaux sont proportionnels aux nombres 5 et 7. Le premier est placé à 4 %, le second à 3 %. Le revenu annuel total est 5.330 francs. Trouver les deux capitaux.

514. Trouver deux capitaux sachant que si l'on place le premier à 4 % et le second à 5 % on obtient un revenu annuel total de 2.600 francs et que si l'on place le premier à 5 % et le second à 4 %, on obtient un revenu annuel total de 2.530 francs.

515. On partage une somme de 80.000 f. en deux parts. La première placée pendant 18 mois produit un intérêt de 2.250 f.; la seconde placée au même taux pendant deux ans produit 5.000 f. d'intérêts. Trouver les deux parts et le taux des placements.

516. On a placé trois capitaux proportionnels aux nombres 5, 7 et 9, le 1er à 3 % pendant 20 mois, le 2e à 4,5 % pendant 16 mois et le 3e à 4 % pendant 21 mois. On a retiré capitaux et intérêts réunis une somme totale de 111.500 francs. Trouver la valeur de chaque capital.

517. Trois joueurs conviennent qu'à chaque partie, le perdant doublera l'avoir des deux autres. Chacun d'eux perd successivement une partie et chaque joueur possède alors 200 f. Quels étaient les avoirs primitifs?

518. Un tailleur a acheté trois pièces d'étoffe. La première a 8 m. de plus que la seconde et 10 m. de moins que la troisième. Le prix du mètre de la première vaut 150 f. de moins que celui de la seconde et 200 f. de plus que celui de la troisième. Finalement la première pièce coûte 1.000 f. de moins que la seconde et 5.500 f. de plus que la troisième. En déduire les longueurs des trois pièces et le prix du mètre de chacune d'elles.

519. On découpe une première fois une bande de 30 cm. de large sur les bords d'un tapis rectangulaire, puis une deuxième fois une bande de 20 cm. de large. Le rapport des surfaces enlevées est $\frac{189}{106}$. Sachant que la largeur finale du tapis est les 3/4 de sa longueur finale, déterminer les dimensions initiales du tapis.

520. Un réservoir est alimenté par trois robinets A, B et C. Les robinets A et B remplissent le réservoir en 72 minutes, A et C le remplissent en 63 minutes et B et C le remplissent en 56 minutes.

1° Quel temps faut-il à chacun des robinets pour remplir seul le réservoir? Et aux trois robinets ouverts simultanément?

2° Sachant que le robinet C débite 10 litres de moins à la minute que les deux robinets A et B simultanément, calculer la capacité du réservoir et le débit de chaque robinet.

521. On a vendu un terrain carré partagé en 3 lots rectangulaires dont la longueur est égale au côté du terrain. Les prix respectifs du mètre carré sont 20 f. pour le premier lot, 24 f. pour le second et 30 f. pour le troisième. La surface du 2e lot est le tiers de la surface totale du terrain, le prix du 1er lot est égal à celui du 3e et le prix de vente total est de 21.600 f. On demande :

1° La surface de chaque lot.

2° La dimension du terrain et celles de chaque lot.

522. On a acheté trois tapis de même qualité pour 44.000 f. Le premier a 0 m. 20 de long de plus que le second et 1 m. de moins que le troisième; il a 0 m. 50 de large de moins que le second et 0 m. 25 de moins que le troisième. Calculer le prix de chacun des tapis sachant que le second a 1 m² de plus que le premier et 2 m² de moins que le troisième.

523. Un cycliste se rend d'une ville A à une ville B distante de 36 km. et revient en A par la même route. Sa vitesse horaire moyenne au retour est inférieure de 10 km. à celle de l'aller et de 4 km. à la vitesse moyenne réalisée sur l'ensemble du trajet. Trouver la vitesse réalisée à l'aller et au retour et la durée de chaque partie du trajet.

524. Un marchand a acheté un lot d'articles identiques. Il en vend d'abord la moitié pour 2.800 f. avec un bénéfice de 10 f. par unité, puis une autre partie pour 2.100 f. avec un bénéfice de 12 f. par unité et solde le reste pour 700 f. en faisant malgré tout un bénéfice de 5 f. par article.

1° Trouver le prix d'achat de chacun des articles.

2° Trouver le nombre d'articles vendus à chaque fois et le bénéfice total réalisé.

525. Un train doit effectuer un trajet de 480 km. Au bout de 300 km. le mécanicien s'aperçoit que sa vitesse horaire a été inférieure de 5 km. à la vitesse prévue. Il calcule qu'il lui faut alors réaliser une vitesse dépassant de 10 km. la vitesse prévue et arrive ainsi à l'heure fixée.

1° Calculer la vitesse réalisée sur chacune des parties du trajet.

2° Déterminer le retard au moment du changement de vitesse.

526. Un avion fait le circuit entre trois villes A, B et C. Les distances AB, BC et CA sont proportionnelles à 4, 3 et 5. Sur le trajet AB la vitesse moyenne horaire de l'avion est supérieure de 15 km. à celle du trajet BC, et inférieure de 10 km. à celle du trajet CA. Sachant que la distance totale parcourue est de 1.620 km. et que la durée du trajet AB est le tiers de la durée du parcours total :

1° Trouver les distances, puis les vitesses réalisées sur les trois trajets.

2° Calculer l'heure du retour en A, sachant que le départ a eu lieu à 8 h. 15 et que les escales en B et C ont été de 30 minutes chacune.

527. On donne un triangle ABC de base BC $= a$, de hauteur AH $= h$. Inscrire à ce triangle un carré MNPQ, M sur le segment AB, N sur AC, P et Q sur BC. Inconnue MQ $= x$. Application : $a = 15$; $h = 9$.

528. Les données sont les mêmes qu'au problème précédent. Inscrire au triangle ABC un rectangle MNPQ, M sur le segment AB, N sur AC, P et Q sur BC, de façon que $\frac{MN}{MQ} = m$, où m est un nombre donné. Application : $a = 24$; $h = 12$; $m = \frac{1}{2}$.

529. On donne un triangle ABC de côtés BC $= a$; CA $= b$; AB $= c$. Construire une parallèle à BC coupant AB en D et AC en E, de sorte que BD + DE + EC $= l$, où l est une longueur donnée. Application : $a = 25$; $b = 17$; $c = 23$; $l = 34$. On supposera D entre A et B.

530. Les données sont les mêmes qu'au problème précédent. Construire DE parallèle à BC de sorte que DE = BD + EC.

531. On donne un demi-cercle de diamètre AB = 2R. Trouver un point M du demi-cercle tel que $\overline{MA}^2 = k.\overline{MB}^2$. Cas particulier où $k = \frac{2}{5}$.

532. On donne un demi-cercle de diamètre AB = 2R. Trouver un point M du demi-cercle tel que $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = k^2$. Cas particulier où $k = R$.

533. On donne un cercle de centre O, de rayon R, et un diamètre AB de ce cercle. Construire un point C de la droite AB, tel qu'en menant la tangente CT au cercle O, l'aire du triangle OCT soit égale à mR^2 où m est un nombre donné. Cas particulier où $m = \frac{1}{2}$.

534. On donne un demi-cercle de diamètre AB = 2R. Trouver une corde MN parallèle à AB de sorte que, Q et P désignant les projections de M et N sur AB, la diagonale du rectangle MNPQ ait une longueur donnée l. On prendra OP $= x$. Cas particulier où $l = R\sqrt{3}$.

535. On donne un demi-cercle de diamètre AB = 2R et la tangente AT en A à ce demi-cercle. Trouver un point M du demi-cercle tel que, H et P désignant ses projections sur AB et AT on ait $\frac{MH}{MP} = m$ (m, nombre donné). Cas particulier $m = 3$.

536. Soit un demi-cercle de centre O et de diamètre AB = 2R. D'un point P de la droite AB on mène la tangente en T au demi-cercle. Elle coupe respectivement les tangentes en A et B aux points M et N. On pose OP = x; BN = y; AM = z.

1° Montrer que MN = $y + z$.

2° Démontrer les relations $\frac{y}{z} = \frac{x - R}{x + R}$ et $yz = R^2$

puis calculer y et z en fonction de R et x.

3° Déterminer x pour que MN = l où l est une longueur donnée.

4° Cas particulier où $l = R\sqrt{5}$. Dans ce cas construire géométriquement le point P.

LIVRE III. — LES FONCTIONS

DIX-SEPTIÈME LEÇON

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

199. Notion de fonction. — Supposons que nous ayons un jour d'hiver relevé, aux différentes heures, les températures suivantes :

6 h : — 2°	10 h : 0°	14 h : + 7°	18 h : + 3°
7 h : — 2°,5	11 h : + 1°,5	15 h : + 6°,5	19 h : + 2°,5
8 h : — 3°	12 h : + 4°	16 h : + 5°,5	20 h : + 2°
9 h : — 2°	13 h : + 6°	17 h : + 4°	21 h : + 1°

A chaque instant de la journée correspond ainsi une température déterminée, qui dépend de l'heure de l'observation. Nous exprimerons cela en disant que :

La température varie avec l'heure de l'observation ou que *la température est fonction de l'heure de l'observation.*

AUTRES EXEMPLES : 1° La longueur d'une tige métallique est fonction de sa température,

2° La longueur d'une corde d'un cercle est fonction de la mesure de l'arc sous-tendu.

3° Le prix d'un coupon d'une pièce d'étoffe est fonction de la longueur de ce coupon.

4° Les rapports trigonométriques d'un angle sont des fonctions de la mesure de cet angle, etc.

200. Définition. — ***Un nombre y est fonction d'un nombre variable x quand à chaque valeur de x correspond une valeur déterminée de y.***

x s'appelle la *variable indépendante*.

x et y peuvent être les mesures de deux grandeurs ou des nombres abstraits. Lorsque y est la valeur numérique d'une expression algébrique de la variable x, on dit que *y est une fonction algébrique de x*. Ainsi :

$$y = 2x + 3, \qquad y = \frac{1}{x+2}, \qquad y = \sqrt{x-1}$$

sont des fonctions algébriques de x. La valeur de y se calcule facilement à partir de celle de x.

D'une façon générale si y est fonction de x, on écrit

$$y = f(x) \qquad \text{(lire « } f \text{ de } x \text{ »)}$$

et la valeur de $f(x)$ pour $x = \alpha$ se désigne par $f(\alpha)$.

201. Fonction définie dans un intervalle. — Quelle que soit la valeur numérique de x on peut calculer celle de $2x + 3$. On dit que *la fonction $y = 2x + 3$ est définie pour toute valeur de x.*

Par contre l'expression $\sqrt{x-1}$ ne peut se calculer que si le radicande $x - 1$ est positif ou nul, donc pour $x - 1 \geqslant 0$ ou $x \geqslant 1$.

On dit que *la fonction $y = \sqrt{x-1}$ n'est définie que dans l'intervalle* $(+1, +\infty)$.

202. Accroissement d'une variable. — Si la variable x, initialement égale à $+4$, prend la valeur $+11$, sa valeur s'accroît de $+11 - 4 = +7$. On dit que x a subi un accroissement de $+7$. Si partant de $+4$, la variable x prend la valeur -5, elle subit un accroissement de $-5 - 4 = -9$. En général :

Lorsque la variable x passe de la valeur initiale x_1 à la valeur finale x_2, elle subit un accroissement égal à $x_2 - x_1$.

On écrit : $\Delta x = x_2 - x_1$ (Δx se lit « delta x »).

Il est clair qu'un accroissement positif correspond à une augmentation de la valeur de la variable et un accroissement négatif à une diminution.

Si $y = f(x)$, l'accroissement de la fonction y, quand x passe de x_1 à x_2 est de même :

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1).$$

203. Croissance d'une fonction. — La longueur d'une tige métallique augmente lorsque sa température augmente et par suite diminue si la température diminue. On dit que sa longueur est fonction croissante de sa température.

Au contraire la longueur d'une corde d'un cercle diminue lorsque sa distance au centre augmente et inversement. On dit que la longueur de la corde est fonction décroissante de sa distance au centre.

Une fonction est croissante quand elle varie dans le même sens que la variable. Elle est décroissante quand elle varie en sens contraire de la variable.

Étudier la variation d'une fonction $f(x)$ c'est chercher les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est croissante, et les valeurs pour lesquelles elle est décroissante. Il peut arriver que la valeur de la fonction soit indépendante de celle de x; on dit que la fonction est ***constante.*** Ainsi la fonction

$$y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

est constante et égale à $+ 1$ si x est positif et à $- 1$ si x est négatif.

204. Étude de la variation d'une fonction. — 1° Considérons une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle (a, b) et deux valeurs x_1 et x_2 quelconques de cet intervalle. Si l'inégalité :

$$x_1 < x_2$$

entraîne toujours $$f(x_1) < f(x_2)$$

il est clair que la fonction $f(x)$ est croissante quand x varie dans l'intervalle (a, b).

Si dans les mêmes conditions, on a toujours, au contraire :

$$f(x_1) > f(x_2)$$

la fonction est décroissante dans l'intervalle considéré.

2° On peut également dire que dans un intervalle considéré $y = f(x)$ est croissante, si à tout accroissement $\Delta x = x_2 - x_1$ de x correspond un accroissement de même signe $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ de y, autrement dit si le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ est positif.

On voit de même que $y = f(x)$ est décroissante si les accroissements correspondants sont de signes contraires et par suite si le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ est négatif.

RÈGLE. — ***Pour étudier la variation d'une fonction $f(x)$ il suffit de calculer le rapport $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. La fonction est croissante dans tout intervalle où ce rapport est positif et elle est décroissante dans tout intervalle où ce rapport est négatif.***

EXEMPLE. — *Etudier la variation de la fonction $y = x^2$.*

On a ici $f(x) = x^2$ et le rapport précédent s'écrit :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2.$$

Il est évident que $x_1 + x_2$ est positif si x_1 et x_2 sont tous deux positifs. La fonction $y = x^2$ est donc croissante si x est positif. De même $x_1 + x_2$ est négatif si x_1 et x_2 sont négatifs. La fonction $y = x^2$ est donc décroissante si x est négatif.

On résume ce qui précède par le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y = x^2$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Sur la première ligne on porte les valeurs remarquables de x, de $-\infty$ à $+\infty$. Sur la seconde, on porte les valeurs correspondantes de y. La flèche descendante indique que la fonction est décroissante dans l'intervalle $(-\infty, 0)$ et la flèche ascendante que la fonction est croissante dans l'intervalle $(0, +\infty)$.

II. COORDONNÉES ET GRAPHIQUES

205. Repérage des points d'un plan. — Considérons dans un plan deux axes perpendiculaires $x'x$ et $y'y$. Prenons pour origine commune le point O d'intersection des deux axes et soit un point M du plan (fig. 22). Menons par le point M les perpendiculaires MA sur $x'x$ et MB sur $y'y$ de façon à former le rectangle OAMB. La position du point M est déterminée par celle des points A et B et, par suite, par les mesures algébriques $\overline{OA} = x$ et $\overline{OB} = y$.

x est l'abscisse du point M.

y est l'ordonnée du point M.

L'ensemble des deux nombres x et y constitue ***les coordonnées du point M*** et les axes $x'x$ et $y'y$ sont ***les axes de coordonnées*** : $x'x$ est l'axe des abscisses et $y'y$ est l'axe des ordonnées

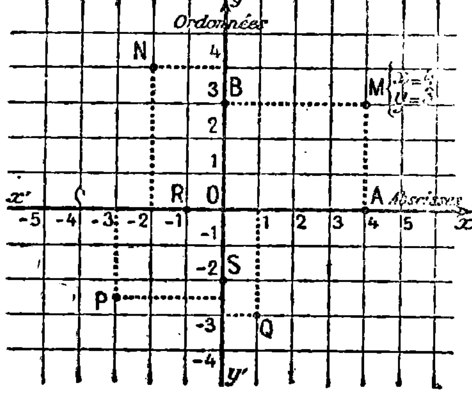


Fig. 22

Notons que ***les coordonnées du point*** M ***sont les mesures algébriques des projections du vecteur*** $\overrightarrow{OM}$ ***sur l'axe*** $x'x$ ***et sur l'axe*** $y'y$.

Sur la figure $x = +4$ et $y = +3$. Le point M est le point représentatif du couple de nombres $(+4, +3)$.

Inversement, pour déterminer un point M de coordonnées x et y il suffit

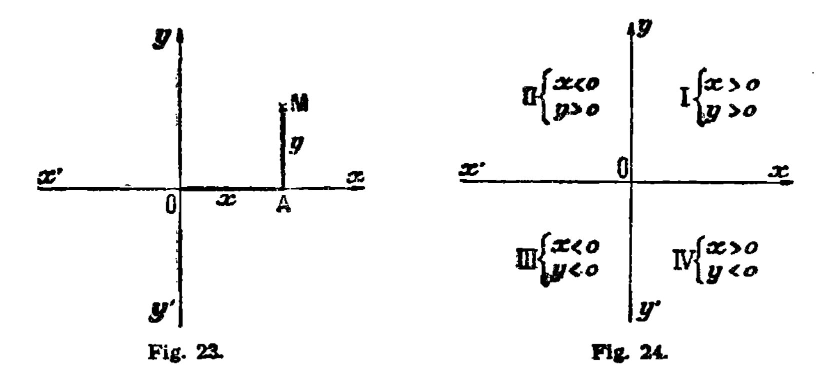


Fig. 23. Fig. 24.

de construire A sur $x'x$ tel que $\overline{OA} = x$ et B sur $y'y$ tel que $\overline{OB} = y$ puis d'achever le rectangle AOBM.

On peut aussi après avoir déterminé A, porter sur la parallèle à $y'y$ menée par A, un segment $AM = |y|$ dans le sens de Oy si y est positif et dans le sens de Oy' si y est négatif (fig. 23).

On construit ainsi les points (fig. 22) : N $\begin{cases} x = -2 \\ y = +4 \end{cases}$

P $\begin{cases} x = -3 \\ y = -2{,}5 \end{cases}$ Q $\begin{cases} x = +1 \\ y = -3 \end{cases}$ R $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ S $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2. \end{cases}$

206. Remarques. — 1° L'origine O a pour coordonnées $x = 0$ et $y = 0$. Les points de l'axe $x'x$ sont caractérisés par une ordonnée $y = 0$ et ceux de l'axe $y'y$ par une abscisse $x = 0$.

2° Les axes de coordonnées divisent le plan en ***quatre régions ou quadrants*** que l'on numérote comme l'indique la figure 24. On voit immédiatement que les points du quadrant I ont leurs coordonnées toutes deux positives, ceux du quadrant III ont leurs coordonnées toutes deux négatives. Par contre les points du quadrant II ont une abscisse négative et une ordonnée positive tandis que ceux du quadrant IV ont une abscisse positive et une ordonnée négative.

3° Notons d'autre part que la bissectrice des angles xOy et $x'Oy'$ se nomme la première bissectrice et celle des angles $x'Oy$ et xOy' la seconde bissectrice des angles formés par les axes de coordonnées.

207. Distance de deux points A (x_1, y_1) et B(x_2, y_2).

Désignons par A′ et B′ les projections A et B sur $x'x$ et par A″ et B″ leurs projections sur $y'y$ (fig. 25). Soit H l'intersection de A″A et de BB′. D'après le théorème de Pythagore on a :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{A''B''}^2.$$

Or $\overline{A'B'} = \overline{OB'} - \overline{OA'} = x_2 - x_1$ et $\overline{A''B''} = \overline{OB''} - \overline{OA''} = y_2 - y_1$, d'où finalement

$$\boxed{\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Fig. 25.

En particulier la distance OM d'un point M(x, y) à l'origine O est telle que :

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2.$$

208. Milieu du segment AB. — Soit à déterminer les coordonnées x et y du milieu de I de AB. La projection I′ de I sur $x'x$ est le milieu de A′B′. Donc (n° 80) :

$$\overline{OI'} = \frac{1}{2}(\overline{OA'} + \overline{OB'})$$

Soit

$$\boxed{x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)}$$

et de même

$$\boxed{y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)}$$

L'abscisse (ou l'ordonnée) du milieu d'un segment est égale à la demi-somme des abscisses (ou des ordonnées) des extrémités de ce segment.

209. Graphique d'une température. — Reprenons le tableau des températures du n° 199. Traçons deux axes de coordonnées rectangulaires et représentons la première observation (6 h.; — 2°) par le point ($x = 6$; $y = -2$), puis la seconde (7 h.; — 2°5) par le point ($x = 7$; $y = -2{,}5$) et ainsi de suite (fig. 26).

Les différents points ainsi obtenus sont disposés sur une courbe qui serait encore plus apparente si nous avions fait des observations plus fréquentes. Cette courbe, que nous pouvons tracer d'une façon approchée, en joignant

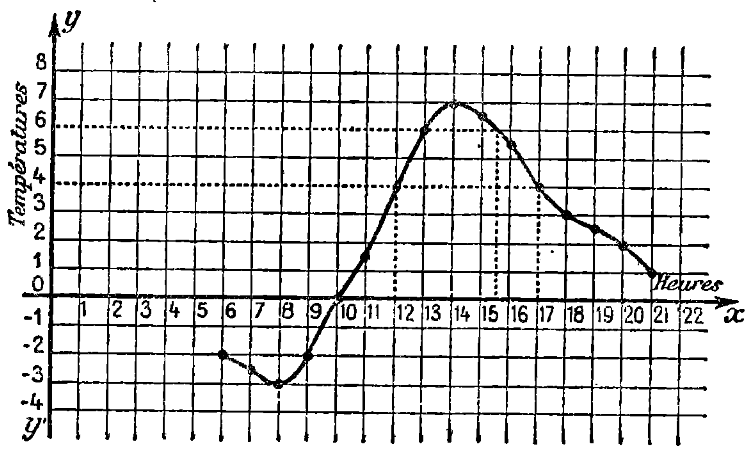


Fig. 26.

tous les points par un trait continu, constitue la *représentation graphique de la température de* 6 *h.* à 21 *h.*

Ce graphique s'interprète plus facilement que le tableau de valeurs qui a servi à le construire, car il permet de suivre à chaque instant la variation de la température.

De 6 h. à 8 h. la température a baissé de — 2° à — 3°; de 8 h. à 14 h. elle a monté de — 3° à + 7° et de 14 h. à 21 h. elle est redescendue de + 7° à + 1°.

D'autre part il est visible que la température de + 4° par exemple a été atteinte à 12 h. et à 17 h. et qu'à 15 h. 30 elle était environ de 6°.

210. Représentation graphique d'une fonction. — Toutes les fonctions sont susceptibles d'une rèprésentation graphique analogue.

EXEMPLE. — *Représenter graphiquement la fonction :* $y = 2x - \frac{x^2}{4}$ *quand x varie de* 0 *à* + 10.

Donnons à x différentes valeurs numériques et calculons les valeurs correspondantes de y. Nous obtenons :

x	0	2	4	6	8	10
y	0	3	4	3	0	— 5

Construisons les points ($x = 0$, $y = 0$); ($x = 2$, $y = 3$); etc... (fig. 27.) Joignons les différents points obtenus par une courbe continue. Nous obtenons la représentation graphique de la fonction $y = 2x - \frac{x^2}{4}$ dans l'intervalle (0, + 10).

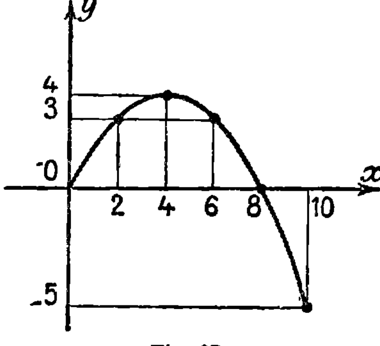


Fig. 27.

— En plus d'une lecture facile, les graphiques ont l'avantage de pouvoir être parfois décrits automatiquement par des appareils enregistreurs (baromètres, manomètres, indicateurs de vitesse, etc...), d'où leur grande utilité pratique.

Notons que la relation $y = f(x)$ se nomme aussi *l'équation de la courbe* représentative de la fonction $f(x)$. Il résulte de ce qui précède :

Pour qu'un point M (x_1, y_1) ***appartienne à la courbe :*** $y = f(x)$, ***il faut et il suffit que :*** $y_1 = f(x_1)$.

EXERCICES

537. On a suspendu à un ressort différents poids et on a obtenu les allongements suivants :

Poids :	1 kg	2 kg	3 kg	4 kg	5 kg	6 kg
Allongements :	5 cm	10 cm	14 cm	17 cm	19 cm	20 cm

Construire le graphique représentant l'allongement du ressort en fonction du poids suspendu.

538. On fait bouillir de l'eau initialement à 10° et on note minute par minute les températures successives suivantes :

10°, 25°, 40°, 54°, 65°, 74°, 83°, 90°, 96°, 100°.

Construire le graphique représentant la température de l'eau en fonction du temps écoulé.

539. Soit x la mesure d'un angle pouvant varier de 0 à 180°. Représenter graphiquement la variation de la fonction $y = \sin x$.

540. Reprendre le problème précédent pour $y = \cos x$.

541. Un rectangle ABCD a une aire donnée de 12 cm². Le côté AB mesure x cm. Calculer la mesure y du côté BC. Représenter la variation de y lorsque x prend toutes les valeurs comprises entre 1 cm et 6 cm.

542. Un trapèze ABCD a une aire de 9 m². La base AB mesure 3 m. On désigne par x la longueur de la base CD. Calculer la hauteur y du trapèze et représenter graphiquement la variation de y lorsque x varie de 0 à 10 m.

— Représenter graphiquement les fonctions :

543. $y = 6x - x^3$ lorsque x varie de -1 à $+7$.

544. $y = x^2 - 6x + 5$ lorsque x varie de 0 à $+6$.

545. $y = \dfrac{3x}{x+2}$ lorsque x varie de -1 à $+8$.

546. Soient deux points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$. Déterminer les coordonnées du point M de la droite AB tel que $\overline{MA} + k\overline{MB} = 0$.

547. Etant donnés deux points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$. On mène la hauteur BH du triangle OAB.

1° Utiliser la relation $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA}.\overline{OH}$ pour démontrer que :

$$\overline{OA}.\overline{OH} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

2° En déduire le rapport $\dfrac{\overline{OH}}{\overline{OA}}$ et les coordonnées du point H en fonction de x_1, y_1, x_2 et y_2.

548. On considère quatre points $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ et $D(x_4, y_4)$ et on désigne par M, N, P, Q, R et S les milieux de AB, CD, AC, BD, AD et BC.

1° Déterminer les coordonnées du milieu I de MN.

2° Montrer que I est aussi le milieu de PQ et celui de RS.

DIX-HUITIÈME LEÇON

ÉTUDE DE LA FONCTION $y = ax$.

211. Fonction du premier degré. — On appelle fonction du premier degré toute fonction de la forme

$$y = ax + b.$$

Les coefficients a et b sont des nombres constants et la variable x peut prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

EXEMPLES : $y = 3x + 2$; $y = 2x + 1$; $y = -x - 4$.

Si le coefficient b est nul la fonction prend la forme simple

$$y = ax$$

que nous allons d'abord étudier.

212. Variation de la fonction : $y = ax$.

1° EXEMPLE : $y = 3x$.

Quel que soit x on peut calculer y. La fonction $y = 3x$ est donc définie pour toutes les valeurs de x. Donnons à x différentes valeurs rangées par ordre croissant et calculons y :

x	-4	-2	0	1	3	5
y	-12	-6	0	3	9	15

Nous constatons que les valeurs de y vont aussi en croissant.

2° EXEMPLE : $y = -2x$.

Cette fonction est également définie quel que soit x et nous obtenons :

x	-5	-3	0	1	4	6
y	$+10$	6	0	-2	-8	-12

Mais nous constatons cette fois qu'à des valeurs de x qui vont en croissant correspondent des valeurs de y qui vont en décroissant.

213. Théorème. — *La fonction $y = ax$ est définie pour toutes les valeurs de x. Elle est croissante quand a est positif. Elle est décroissante quand a est négatif.*

On peut en effet, quel que soit x, calculer le produit ax et déterminer y. Soient x_1 et x_2 deux valeurs particulières de x et y_1 et y_2 les valeurs correspondantes de y. Supposons :

$$x_1 < x_2$$

et multiplions les deux membres de cette inégalité par a. Nous obtenons :

1° *Si a est positif :* $ax_1 < ax_2$, soit $y_1 < y_2$
la fonction est donc croissante.

2° *Si a est négatif :* $ax_1 > ax_2$, soit $y_1 > y_2$
la fonction est donc décroissante.

214. Valeurs particulières. — 1° Nous pouvons d'abord remarquer que pour $x = 0$, on a $y = 0$. D'autre part y est du signe de x ou du signe contraire suivant que a est positif ou négatif.

2° Si x devient infini il en est de même de y. Par exemple si $y = 3x$, pour obtenir $y > 1.000.000$, il suffit de prendre $x > \frac{1.000.000}{3}$.

215. Tableau de variation. — En résumé :

Lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction $y = ax$

1° *Croît de $-\infty$ à $+\infty$ si a est positif.*

2° *Décroît de $+\infty$ à $-\infty$ si a est négatif.*

La variation de la fonction $y = ax$ se résume donc par l'un des tableaux suivants:

$a > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\infty$

216. Généralisation. — On peut dire que la fonction $y = ax$ varie dans le même sens que x si a est positif et en sens contraire si a est négatif. Plus généralement :

La fonction $y = af(x)$ (où a est un nombre constant) varie dans le même sens que la fonction $y = f(x)$ si a est positif et en sens contraire si a est négatif.

En effet l'inégalité $f(x_1) < f(x_2)$ entraîne :

$af(x_1) < af(x_2)$ si a est positif.

$af(x_1) > af(x_2)$ si a est négatif.

Par suite toute augmentation de $f(x)$ entraîne une augmentation de $af(x)$ si a est positif et une diminution de $af(x)$ si a est négatif.

217. Représentation graphique.

EXEMPLE. — *Représenter graphiquement la fonction :* $y = \frac{3}{2}x$.

Donnons à x différentes valeurs et calculons y.

x	0	1	2	3	-1	-2
y	0	1,5	3	4,5	$-1,5$	-3

et construisons les points A(1; 1,5), B(2; 3), C(3; 4,5), D(— 1; — 1,5), etc... (fig. 28). Nous constatons que ces points sont disposés sur une droite qui passe par le point O correspondant à ($x = 0$; $y = 0$).

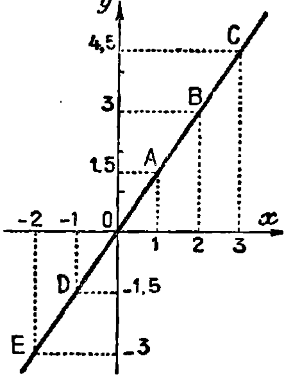


Fig. 28.

Démontrons que ce résultat est général :

218. Théorème. — ***La courbe représentative de la fonction $y = ax$ est une droite passant par l'origine des coordonnées.***

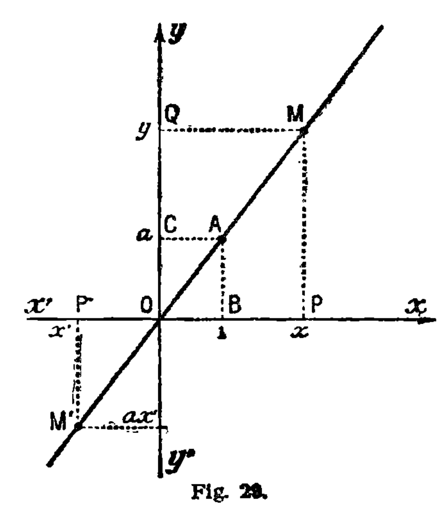


Fig. 29.

Pour la valeur particulière $x = 1$ nous avons $y = a$.

Construisons le point A de coordonnées $\overline{OB} = 1$ et $\overline{OC} = a$ et traçons la droite OA (fig. 29).

1° *Les coordonnées $x = \overline{OP}$ et $y = \overline{OQ}$ de tout point* M *de la droite* OA *vérifient la relation $y = ax$.*

Les triangles rectangles OPM et OBA sont homothétiques donc :

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}}$$

De même les triangles rectangles OQM et OCA sont homothétiques d'où :

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}}$$

On en déduit en rapprochant ces deux égalités

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} \quad \text{soit} \quad \frac{y}{a} = \frac{x}{1}.$$

Donc : $y = ax$

2° *Réciproquement tout point d'abscisse x' et d'ordonnée $y' = ax'$ se trouve sur la droite* OA.

Soit P′ le point de l'axe des abscisses tel que $\overline{OP'} = x'$. D'après ce qui précède le point M′ de la droite OA ayant pour abscisse x' a pour ordonnée $y' = ax'$. Donc le point de coordonnées $(x' ; y' = ax')$ se trouve bien sur OA.

— La droite OA est par suite la courbe représentative de la fonction $y = ax$.

219. Coefficient angulaire ou pente de la droite $y = ax$.

La droite $y = ax$ est définie par le point O et le point A ($x = 1$, $y = a$). Donnons au coefficient a différentes valeurs et construisons les droites correspondantes (fig. 30).

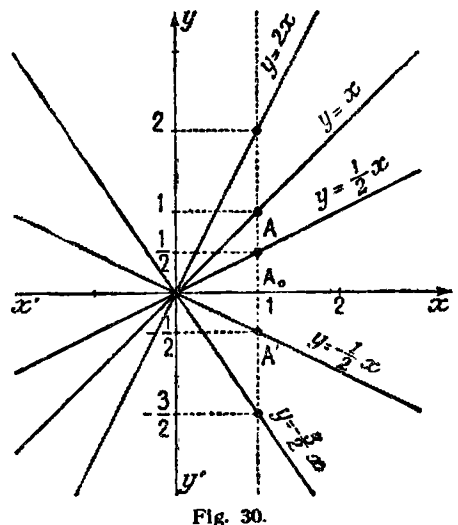


Fig. 30.

1° Si *a est positif*, la fonction $y = ax$ est croissante et la droite correspondante se trouve dans les quadrants I et III.

Si a est *négatif*, la fonction $y = ax$ est décroissante et la droite correspondante se trouve dans les quadrants II et IV.

2° *Les droites*
$$y = ax \text{ et } y = -ax$$
sont symétriques par rapport aux axes de coordonnées. Il en est ainsi des droites $y = \frac{1}{2}x$ et $y = -\frac{1}{2}x$ car les points A et A′ sont symétriques par rapport à $x'x$. Par suite $x'x$ et $y'y$ sont les bissectrices des angles formés par OA et OA′.

3° *Lorsque la valeur absolue de a augmente, l'angle xOA augmente.* Le point $(1, a)$ s'éloigne en effet de Ox. Si a devient nul la droite $y = ax$ vient se confondre avec $x'x$. Si a devient très grand en valeur absolue la droite se rapproche de $y'y$.

— En définitive, la position de la droite $y = ax$ est fonction de la valeur algébrique du coefficient a qui est appelé *coefficient angulaire* ou *pente de la droite.*

220. Remarques. — 1° On est souvent amené à adopter des unités différentes pour la graduation des axes de coordonnées. La fonction $y = ax$ est toujours représentée par une droite car la démonstration du n° 218 reste valable.

2° Lorsqu'on adopte la même unité pour les deux axes et dans ce cas seulement on peut écrire (fig. 29) : $\frac{BA}{OB} = \frac{OC}{OB} = |a|$.

Par suite la valeur absolue $|a|$ du coefficient angulaire a est *la tangente trigonométrique de l'angle* xOA.

La première bissectrice a alors pour équation $y = x$ et la seconde bissectrice a pour équation $y = -x$.

221. Application aux grandeurs proportionnelles. — Rappelons que deux grandeurs sont proportionnelles lorsque les différentes mesures de l'une sont proportionnelles aux mesures correspondantes de l'autre. Il existe alors un rapport constant entre les mesures correspondantes x et y de ces deux grandeurs.

Ainsi, le prix y d'un coupon d'une pièce d'étoffe est proportionnel à sa longueur x en mètres et le rapport $\frac{y}{x}$ est le prix d'un mètre de cette étoffe.

En désignant d'une façon générale par a la valeur du rapport $\frac{y}{x}$ on obtient

$$y = ax$$

relation qui caractérise les mesures de deux grandeurs proportionnelles.

EXEMPLE. — *Représenter graphiquement la distance parcourue par un piéton qui marche à la vitesse de 4 km à l'heure.*

La distance y parcourue en x heures est : $y = 4x$.

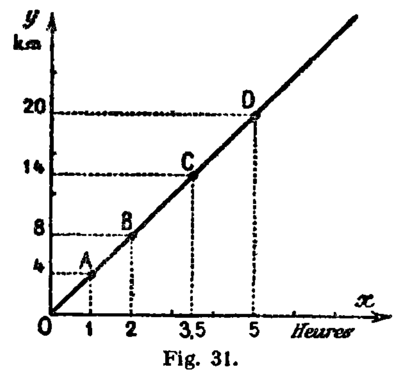


Fig. 31.

Graduons l'axe Ox en heures et l'axe Oy en kilomètres. La courbe représentative est la droite joignant le point O au point A ($x = 1$, $y = 4$) (fig. 31). Sur le graphique on voit par exemple que le piéton aura parcouru 14 km. en 3 heures et demie et qu'au bout de 5 heures il aura fait 20 km.

EXERCICES

— Représenter graphiquement les fonctions :

549. $y = 3x$ **550.** $y = \frac{3}{4}x$ **551.** $y = \frac{5}{2}x$

552. $y = -2x$ **553.** $y = -\frac{x}{3}$ **554.** $y = -\frac{3}{2}x$

555. 1° Montrer que si les coordonnées x et y d'un point M sont telles que $y = ax$ elles vérifient la relation :

$$(x - a)^2 + (y + 1)^2 = (x + a)^2 + (y - 1)^2.$$

2° On construit les points A(a, — 1) et B(— a, + 1), en déduire que le lieu du point M est la médiatrice du segment AB.

556. Représenter graphiquement les fonctions : $y = \frac{1}{2}x$ et $y = 2x$.

On prend sur la première droite le point A, d'abscisse $\overline{OP} = 2$ et sur la deuxième le point B d'ordonnée $\overline{OQ} = 2$. Comparer les triangles OPA et OBQ et en déduire que les deux droites sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle xOy.

557. Représenter graphiquement : $y = 3x$ et $y = -\frac{1}{3}x$.

On prend sur la première droite le point M d'abscisse OA = 1 et sur la seconde le point N d'abscisse OB = 3. Comparer les triangles OAM et NOB et montrer que les deux droites sont perpendiculaires.

558. Reprendre l'exercice précédent avec les droites $y = \frac{3}{4}x$ et $y = -\frac{4}{3}x$.

559. Quelle est l'équation de la droite passant par l'origine et le point A de coordonnées : ($x = 4$, $y = 6$)?

560. Même exercice que le précédent avec le point A ($x = 4{,}5$, $y = -3$)?

561. Représenter graphiquement le prix d'une longueur d'étoffe sachant que 3 m. de cette étoffe coûtent 1.200 f. Déterminer graphiquement :

1° Le prix de 4 m. 20 d'étoffe;

2° La longueur d'étoffe obtenue pour 750 f.

562. Même problème que le précédent en supposant que 2 m. 50 coûtent 1.500 f.

563. Représenter graphiquement la distance parcourue par un cycliste qui a effectué 56 km. en 2 h. 20. Déterminer graphiquement :

1° La distance parcourue en 1 h. 40.

2° Le temps mis pour parcourir 35 km.

564. Même problème que le précédent pour un automobiliste qui a parcouru 60 km. en 48 minutes.

565. Représenter sur un même graphique les distances parcourues par un motocycliste et un cycliste partis en même temps sur la même route sachant que le premier a parcouru 60 km. en 1 h. 15 et le second 32 km. en 1 h. 20. Déterminer graphiquement :

1° L'avance en km. du motocycliste au bout de 2 h. 10.

2° L'intervalle de temps séparant les passages au kilomètre 40.

DIX-NEUVIÈME LEÇON

ÉTUDE DE LA FONCTION $y = ax + b$.

222. ***La fonction $y = ax + b$ est définie pour toute valeur de x.*** En effet a et b étant deux nombres donnés et x un nombre quelconque, on peut toujours calculer le produit ax puis ajouter le nombre b. Autrement dit la fonction $y = ax + b$ est définie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

223. Etude de la variation.

EXEMPLE I : $y = 2x + 5$. Donnons à x différentes valeurs rangées par ordre croissant et calculons les valeurs de y :

x	-4	$-2{,}5$	-1	0	1	3
y	-3	0	3	5	7	11

On constate que les valeurs de y vont en croissant.

EXEMPLE II : $y = -2x + 3$. On obtient de même

x	-4	0	1	$1{,}5$	4	7
y	11	3	1	0	-5	-11

On constate que les valeurs de y vont cette fois en décroissant.

224. Théorème. — ***La fonction $y = ax + b$ est croissante si a est positif. Elle est décroissante si a est négatif.***

Soient x_1 et x_2 deux valeurs quelconques de x telles que

$$x_1 < x_2$$

1° ***Si a est positif,*** on en déduit : $ax_1 < ax_2$ et par suite

$$ax_1 + b < ax_2 + b \qquad \text{donc} \qquad y_1 < y_2$$

ce qui montre que la fonction est croissante.

2° ***Si** a **est négatif*** on a au contraire : $ax_1 > ax_2$ et par suite

$$ax_1 + b > ax_2 + b \qquad \text{donc} \qquad y_1 > y_2$$

la fonction est donc décroissante.

225. Valeurs particulières. — 1° Pour $x = 0$ on obtient $y = b$.

2° $y = 0$ si $ax + b = 0$ donc pour $x = -\frac{b}{a}$.

3° Si x est infini il en est de même du produit ax et de la somme $ax + b$. Donc y est infini en même temps que x.

226. Tableau de variation. — Les résultats précédents sont résumés dans les tableaux suivants :

$a > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\infty$

Remarque. — Si $a = 0$ la fonction se réduit à $y = b$. La valeur de y est constante et indépendante de celle de x.

227. Généralisation. — Nous pouvons remarquer que les deux tableaux précédents sont identiques à ceux du n° 215. Autrement dit, que la fonction $y = ax + b$ varie dans le même sens que la fonction $y = ax$. En général :

***La fonction** $y = f(x) + b$ **(où** b **est un nombre constant) varie dans le même sens que la fonction** $y = f(x)$.*

Ceci provient du fait que l'inégalité :

$$f(x_1) < f(x_2)$$

entraîne toujours : $f(x_1) + b < f(x_2) + b$.

On voit d'ailleurs que tout accroissement de $f(x)$ entraîne le même accroissement pour

$$y = f(x) + b.$$

Fig. 32.

228. Représentation graphique. — Exemple. *Représenter graphiquement la fonction :*

$$y = -2x + 3.$$

Donnons à x différentes valeurs : -1, 0, 1, 2, 3... nous obtenons respectivement pour y : 5, 3, 1, -1, -3. Construisons les points ($x = -1$, $y = 5$), ($x = 0$, $y = 3$), etc... (fig. 32).

Nous constatons que ces points sont disposés suivant une droite. Ceci est général.

229. Théorème. — ***La fonction $y = ax + b$ est représentée graphiquement par une droite parallèle à la droite $y = ax$ et coupant l'axe $y'y$ au point d'ordonnée b.***

Supposons tracée la droite $y = ax$ (fig. 33). Soit M un point quelconque d'abscisse $\overline{OP} = x$ et d'ordonnée $\overline{PM} = ax + b$. Désignons par N le point où la droite PM coupe la droite $y = ax$. On a $\overline{PN} = ax$. L'application de la formule de Chasles donne

$$\overline{NM} = \overline{PM} - \overline{PN} = (ax + b) - ax = b.$$

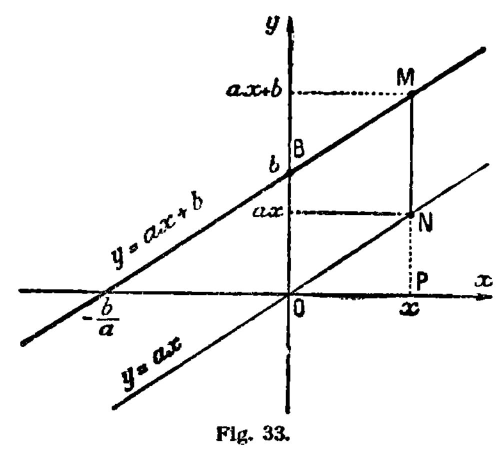


Fig. 33.

Soit B le point de l'axe $y'y$ d'ordonnée b. Les deux segments OB et NM sont égaux, parallèles et de même sens et le quadrilatère OBMN est un parallélogramme. Lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$, le point N décrit la droite $y = ax$ et le point M décrit donc la parallèle à cette droite menée par le point B.

La fonction $y = ax + b$ est représentée graphiquement par une droite.

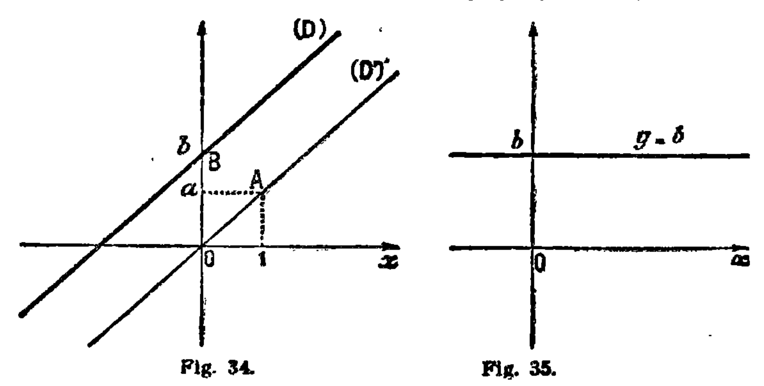


Fig. 34. Fig. 35.

C'est pourquoi on l'appelle ***fonction linéaire.*** Le coefficient a qui détermine l'inclinaison de la droite par rapport aux axes est le ***coefficient angulaire*** ou ***la pente de la droite.***

Le nombre b qui détermine l'ordonnée du point d'abscisse $x = 0$ s'appelle l'***ordonnée à l'origine.***

Le point d'intersection de la droite $y = ax + b$ avec l'axe Ox a pour ordonnée $y = 0$. Son abscisse x est telle que $ax + b = 0$. Elle est donc :

$$x = -\frac{b}{a}.$$

230. Réciproque. — Toute droite (D) non parallèle à Oy coupe cet axe en un point B. Désignons par b son ordonnée (fig. 34). Traçons la parallèle (D′) à cette droite issue de l'origine et soit A le point de cette parallèle qui a pour abscisse $+1$. Désignons par a son ordonnée. La droite représentative de la fonction $y = ax$ se confond avec (D′) et par suite la droite (D) se confond avec la représentation graphique de la fonction $y = ax + b$.

***A toute droite* (D) *du plan non parallèle à* Oy *correspond une relation de la forme* $y = ax + b$ *qui se nomme l'équation de la droite* (D).**

231. Construction de la droite $y = ax + b$.

Il suffit de déterminer deux points de cette droite pour pouvoir la tracer. Si b est différent de zéro, on peut toujours choisir les intersections avec les axes (fig. 33) $(x = 0, y = b)$ et $\left(x = -\frac{b}{a}, y = 0\right)$.

Cependant si les deux points obtenus sont trop rapprochés, il est bon de construire au moins un autre point de la droite en prenant pour abscisse la plus grande valeur de x compatible avec les limites de la figure.

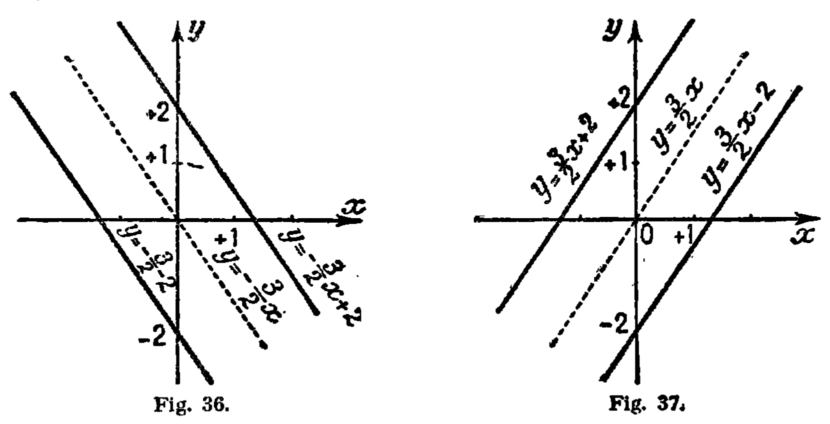


Fig. 36. Fig. 37.

Si $a = 0$, la droite a pour équation $y = b$. Elle est parallèle à Ox (fig. 35). Les figures 36 et 37 montrent différents exemples suivant que le coefficient angulaire est positif ou négatif. Notons que :

Pour que deux droites soient parallèles, il faut et il suffit qu'elles aient même coefficient angulaire.

232. Condition pour que deux droites soient perpendiculaires. — Pour que les droites : $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, soient perpendiculaires, il faut et il suffit que leurs parallèles :

$$y = ax \quad \text{et} \quad y = a'x$$

le soient (fig. 38).

Par le point H de $x'x$ d'abscisse 1 menons la parallèle à $y'y$ qui coupe la droite $y = ax$ au point A (1 ; a) et la droite $y = a'x$ au point A' (1; a').

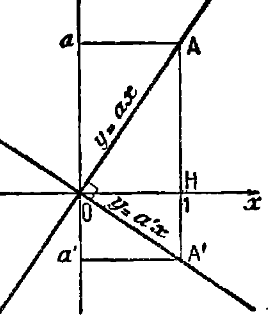


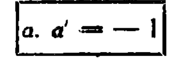
Fig. 38.

La condition :

$$\overline{OH}^2 = -\overline{HA} \cdot \overline{HA'}$$

est nécessaire et suffisante pour que le triangle AOA' soit rectangle en O.

Elle donne :

$1 = -a.\ a'$ soit :  $a.\ a' = -1$

***Pour que deux droites soient perpendiculaires, il faut et il suffit que le produit de leurs coefficients angulaires soit égal à* — 1.**

233. Problèmes. — 1° *Déterminer l'équation de la droite* AB *définie par les points* A ($x = 2$, $y = 3$) *et* B ($x = 6$, $y = 5$) (fig. 39).

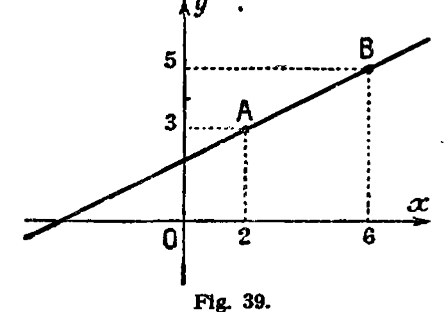


Fig. 39.

Déterminons a et b pour que la droite $y = ax + b$ passe par A et par B, en exprimant que les coordonnées de ces points vérifient l'équation de la droite. Nous obtenons :

Pour A : $3 = a \times 2 + b$

soit $2a + b = 3$. (1)

Pour B : $5 = a \times 6 + b$

soit $6a + b = 5$. (2)

Les deux relations (1) et (2) permettent de calculer a et b. On obtient

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b = 2.$$

L'équation de la droite AB est donc :

$$y = \frac{x}{2} + 2.$$

2° ***Trouver l'équation de la parallèle à la droite*** $y = 2x + 3$ ***menée par le point*** A ($x = 2$, $y = 3$).

La droite cherchée a même coefficient angulaire que $y = 2x + 3$. Son équation est donc : $y = 2x + b$.

Déterminons b en écrivant que les coordonnées du point A vérifient cette équation, nous obtenons :

$$3 = 2 \times 2 + b \quad \text{ou} \quad 3 = 4 + b$$

ce qui donne $b = -1$.

L'équation de la parallèle est donc : $y = 2x - 1$.

EXERCICES

Étudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

566. $y = 2x - 3$ **567.** $y = -x + 4$ **568.** $y = -2x - 1$.

569. $y = \frac{x}{2} + 1$ **570.** $y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{2}$ **571.** $y = \frac{2x}{3} - 1$.

572. $y = \frac{4x}{3} + 2$ **573.** $y = \frac{5}{2}x - 3$ **574.** $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

Construire sur un même graphique les droites suivantes et trouver leur particularité géométrique.

575. $y = 3x + 2$ et $y = -3x + 2$ **576.** $y = -3x + 5$ et $y = -3x - 1$.

577. $y = 2x - 1$ et $y = -2x + 1$ **578.** $y = \frac{x}{3} + 1$ et $y = -3x - 3$.

Déterminer l'équation des droites définies par les points :

579. A (+ 1 ; — 1) et B (+ 7 ; + 2) **580.** A (+ 1 ; + 4) et B (+ 4 ; — 2).

581 A (+ 3 ; + 1) et B (0 ; — 5) **582.** A (0 ; + 1) et B (+ 8 ; — 1).

583. A (+ 3 ; — 2) et B (+ 3 ; — 5) **584.** A (+ 5 ; — 2) et B (— 1 ; — 2).

585. Former l'équation de la droite de coefficient angulaire $a = 5$ et passant par le point A ($x = 2$, $y = 6$).

586. On considère trois points M, N, P de coordonnées respectives :

(— 2, + 1) ; (+ 1, + 4) et (+ 4, + 2).

Former les équations des côtés du triangle MNP. On mène par chacun des sommets la parallèle au côté opposé. Former les équations des côtés du nouveau triangle ainsi obtenu.

587. On considère le point A de l'axe $x'x$ et d'abscisse a et les points B et C de l'axe $y'y$ d'ordonnées b et c.

1° Établir les équations des côtés AB et AC du triangle ABC, puis celles des hauteurs du triangle.

2° Montrer que les hauteurs se coupent en un point H de $x'x$ dont on demande l'abscisse en fonction de a, b et c.

Application : $a = 8$; $b = 6$ et $c = -4$.

588. Soit un triangle équilatéral ABC dont le côté mesure 3 cm. On mène la parallèle à BC qui coupe AB en M et AC en N. On pose d'autre part AM $= x$. Calculer et représenter graphiquement le périmètre du trapèze BMNC. Limiter le graphique.

589. Un triangle a deux côtés mesurant 3 cm. et 5 cm. Soit x la longueur du troisième côté. Calculer et représenter graphiquement le périmètre y du triangle. Limiter le graphique.

590. Un rectangle a pour dimensions 5 cm. et 7 cm. On diminue chacune des dimensions d'une même longueur x. Calculer et représenter graphiquement le périmètre du rectangle.

591. Un vase pèse à vide 300 grammes. Calculer son poids total y lorsqu'il contient un nombre x de centimètres cubes d'une huile dont la densité est 0,9.

Représenter graphiquement la variation de y en fonction de x.

592. Un flacon contenant 600 cm^3 de mercure pèse 8 kg.960. Calculer et représenter graphiquement le poids y du flacon lorsqu'on enlève un nombre x de cm^3 de mercure (densité du mercure : 13,6).

593. Une personne possède un capital de 12.000 f. Elle en place une partie à 4 % et le reste à 6 %. Calculer et représenter graphiquement son revenu annuel y en fonction de la somme x placée à 4 %.

594. Un mélange de 40 kg. de café comprend du café à 240 f. le kilogramme et du café à 320 f. le kilogramme. Calculer et représenter graphiquement le prix y du kilogramme du mélange en fonction du poids x du premier café.

Déterminer graphiquement la composition du mélange qui revient à 290 f. le kg.

595. Le thermomètre Fahrenheit marque 32° lorsque le thermomètre centigrade marque 0°. Sachant que 9° Fahrenheit correspondent à 5° centigrades, calculer et représenter graphiquement la température Fahrenheit y correspondant à une température centigrade x.

Déterminer y lorsque x vaut — 15°, 10°, 60° et 100°.

596. Un capital de 8.000 f. est placé à 5 % à intérêts simples. Calculer la somme y capitalisée au bout de x années. Représenter graphiquement cette somme et déterminer x pour qu'elle soit égale à 10.800 f.

597. Un vase plein d'une huile de densité 0,90 pèse 3 kg. 280. Plein d'alcool de densité 0,83 il pèse 3 kg. 042. Calculer et représenter graphiquement le poids de ce vase en fonction de la densité du liquide contenu.

598. Un réservoir contient 360 l. d'eau. Il est alimenté par un robinet qui débite 12 l. à la minute. Calculer la quantité d'eau contenue dans le réservoir à un instant donné. En déduire :

1° Dans combien de temps le réservoir contiendra 600 litres.

2° La quantité d'eau contenue au bout de 16 minutes.

VINGTIÈME LEÇON

APPLICATIONS DE LA FONCTION LINÉAIRE

234. Représentation graphique de l'équation : $ax + by = c$.

EXEMPLE. — Soit à chercher les points dont les coordonnées x et y vérifient l'équation

$$2x + 3y = 12.$$

Résolvons cette équation par rapport à y :

$$y = -\frac{2}{3}x + 4.$$

Les points cherchés sont donc les points de la droite :

$$y = -\frac{2x}{3} + 4 \quad \text{(fig. 40).}$$

Fig. 40.

Pour construire cette droite, il suffit d'en construire deux points. On obtient par exemple les points

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 6. \end{cases}$$

Il est souvent commode de choisir les intersections avec les axes :

Avec Ox : $y = 0$ d'où $2x = 12$ et $x = 6$

Avec Oy : $x = 0$ d'où $3y = 12$ et $y = 4$.

235. Théorème. — ***L'équation*** $ax + by = c$ ***est représentée graphiquement par une droite.***

1° Si $b \neq 0$, l'équation s'écrit : $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Elle est représentée par une droite de coefficient angulaire $-\frac{a}{b}$ rencontrant les axes aux points : A $\left(x = \frac{c}{a}, y = 0\right)$ et B $\left(x = 0, y = \frac{c}{b}\right)$ (fig. 41).

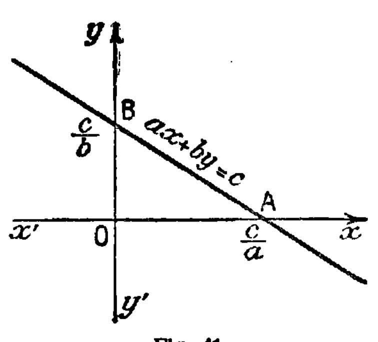


Fig. 41.

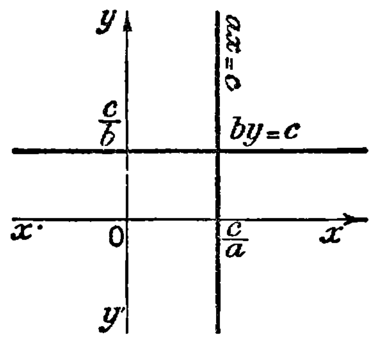


Fig. 42.

2° Si $a = 0$, l'équation se réduit à $by = c$ ou $y = \frac{c}{b}$.

La droite est la parallèle à Ox, d'ordonnée $\frac{c}{b}$ (fig. 42).

3° Si $b = 0$, l'équation s'écrit :

$$ax = c \quad \text{ou} \quad x = \frac{c}{a}.$$

La droite est la parallèle à Oy, d'abscisse $\frac{c}{a}$ (fig. 42).

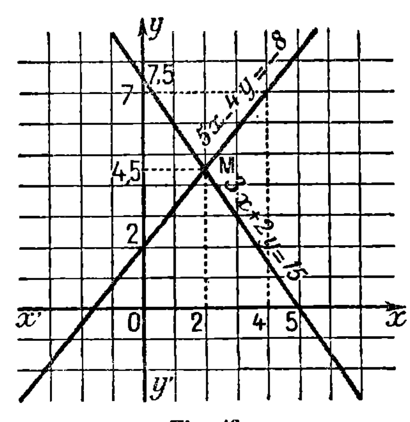


Fig. 43.

236. Résolution graphique d'un système de deux équations à deux inconnues.

Exemple. — Soit le système

$$3x + 2y = 15$$
$$5x - 4y = -8.$$

Construisons les droites définies par ces deux équations. Elles se coupent en M. Les coordonnées du point M vérifient les deux équations. Elles constituent donc la solution du système proposé.

D'après le graphique (fig. 43) on trouve : $x = 2$, $y = 4{,}5$.

Par le calcul on vérifie qu'il en est bien ainsi.

En général, cependant, cette méthode graphique ne donnera qu'une valeur approchée de la solution d'un système, mais sera toujours utile pour vérifier la vraisemblance d'un résultat obtenu par le calcul.

237. Théorème. — ***Les coordonnées du point d'intersection de deux droites constituent la solution du système à deux inconnues formé par les équations de ces deux droites.***

Soient les deux droites définies par les équations du système :

$$\text{(I)} \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'x = c'. \end{cases}$$

Elles peuvent être concourantes, parallèles ou confondues.

1° *Si les droites sont concourantes* leurs coefficients angulaires sont différents :

$$-\frac{a}{b} \neq -\frac{a'}{b'} \quad \text{soit} \quad \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \quad \text{ou} \quad ab' - a'b \neq 0.$$

Les deux droites ont un seul point commun et *le système I admet une solution unique.*

2° *Si les droites sont parallèles* leurs coefficients angulaires sont égaux mais leurs ordonnées à l'origine sont différentes :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \text{et} \quad \frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'}$$

Soit

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

ou $\qquad ab' - a'b = 0 \quad \text{et} \quad ac' - a'c \neq 0.$

Dans ce cas le *système I est impossible.*

3° *Si les droites sont confondues,* elles ont même coefficient angulaire et même ordonnée à l'origine. On obtient de même

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

D'où : $\qquad ab' - a'b = 0 \quad \text{et} \quad ac' - a'c = 0.$

Le système I admet dans ce cas une infinité de solutions : *il est indéterminé.* Nous retrouvons ainsi les conclusions du n° 178.

238. Mouvement uniforme. — ***On dit qu'un mobile se déplace d'un mouvement uniforme lorsque la distance parcourue par ce mobile est proportionnelle au temps mis à la parcourir.***

On appelle vitesse de ce mobile la distance qu'il parcourt pendant l'unité de temps.

EXEMPLE I. — *Un cycliste part à 8 h. et roule à une vitesse horaire de 24 km. Déterminer la distance parcourue à une heure x quelconque.*

A 10 h. 30, par exemple, le cycliste a roulé pendant 2 h. 30, soit 2,5 heures Il a donc parcouru 24 km. × 2,5 = 60 km.

De même, à l'heure x, il aura roulé pendant $(x - 8)$ heures et parcouru une distance y égale à 24 km. × $(x - 8)$. D'où :

$$y = 24x - 192.$$

EXEMPLE II. — *Un train se dirige vers Paris à la vitesse de 75 km. à l'heure. Sachant qu'à 3 h. il est à 380 km. de Paris, déterminer sa distance à l'heure x.*

Entre 3 heures et x heures, il s'est écoulé $(x - 3)$ heures et le train a parcouru 75 km × $(x - 3)$. Par suite sa distance à Paris est alors

$$y = 380 - 75(x - 3) = 380 - 75x + 225.$$

Soit
$$y = 605 - 75x.$$

EXEMPLE III. — Considérons sur un axe d'origine O, un point mobile M, d'abscisse x, animé d'un mouvement uniforme (fig. 44) et soit M_0, d'abscisse x_0 la position du point M, à l'instant initial. Désignons par v la vitesse à la seconde du point M, comptée positivement si M se déplace dans le sens de l'axe et négativement dans le cas contraire. Autrement dit v est la mesure algébrique du vecteur parcouru par le point M en une seconde. Le vecteur $\overline{M_0M}$ parcouru en t secondes a, par suite, pour mesure algébrique :

$$\overline{M_0M} = vt.$$

Or d'après la formule de Chasles : $\overline{OM} = \overline{OM_0} + \overline{M_0M}$.

Soit
$$x = x_0 + vt.$$

Ainsi, le nombre qui détermine la position d'un mobile animé d'un mouvement uniforme est une fonction linéaire du temps.

La relation linéaire obtenue se nomme l'*équation horaire du mouvement*.

Un tel mouvement sera donc représenté par une droite. Pratiquement le graphique sera limité à un segment correspondant au temps écoulé entre le départ du mobile et son arrivée.

Les graphiques sont souvent utilisés pour étudier la marche de plusieurs mobiles parcourant le même chemin. Les graphiques des chemins de fer permettent d'établir facilement l'horaire des trains sur une ligne donnée.

x' — O — M_0 (x_0) — M → (x) — x

Fig. 44.

***239. Signe de l'expression : $ax + by + c$.**

EXEMPLE. — La valeur numérique de l'expression $2x + 3y - 6$ dépend des valeurs attribuées à x et y et par suite de la position dans le plan du point $M(x, y)$. Cette valeur est nulle si le point M se trouve sur la droite D (fig. 45) représentée par l'équation :

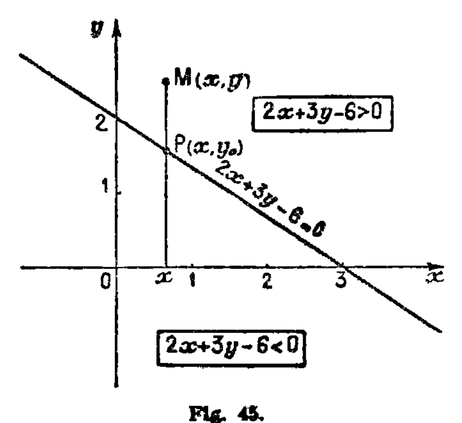


Fig. 45.

$$2x + 3y - 6 = 0 \qquad (1)$$

Supposons M en dehors de cette droite. Désignons par P le point de la droite D qui a même abscisse x que M et soit y_0 son ordonnée. D'après (1) on a :

$$2x + 3y_0 - 6 = 0.$$

et on peut écrire

$$2x + 3y - 6 = (2x + 3y - 6) - (2x + 3y_0 - 6) = 3y - 3y_0.$$

Soit

$$2x + 3y - 6 = 3\,(y - y_0).$$

Pour toute valeur de x l'expression : $2x + 3y - 6$ est donc du signe de $y - y_0$. Elle est positive si $y > y_0$ c'est-à-dire si M se trouve dans la région (I) située au-dessus de la droite D. Elle est négative si $y < y_0$ c'est-à-dire si M est dans la région II située au-dessous de la droite D.

Ce résultat est général :

La droite $ax + by + c = 0$ partage le plan en deux régions. Si x et y sont les coordonnées d'un point quelconque du plan, l'expression $ax + by + c$ est positive dans l'une de ces régions et négative dans l'autre.

Pour distinguer ces deux régions il suffit de rechercher le signe correspondant à un point particulier de l'une d'entre elles. Si $c \neq 0$ on prend l'origine des coordonnées où $x = 0$ et $y = 0$. On voit que :

L'expression $ax + by + c$ est du signe de c dans la région qui contient l'origine des coordonnées.

***240. Inéquations à deux inconnues.** — Nous pouvons ainsi déterminer les points du plan dont les coordonnées satisfont à une inéquation ou à plusieurs inéquations simultanées à deux inconnues.

EXEMPLE I. — *Résoudre le système d'inéquations simultanées :*

$$x + y - 1 < 0 \quad (1); \qquad x - y + 1 > 0 \quad (2); \qquad y + 1 < 0. \quad (3)$$

On construit (fig. 46) les droites d'équations respectives :

$$x + y - 1 = 0; \qquad x - y + 1 = 0; \qquad y + 1 = 0.$$

On élimine les demi-plans dont les points ont des coordonnées qui ne satisfont pas à l'une des inéquations (1), (2) et (3). Finalement le point $M(x, y)$ doit se trouver à l'intérieur du triangle ABC.

EXEMPLE II. — *Résoudre l'inéquation :*

$$(x - y)(x + 2y)(2x + y - 3) < 0.$$

On construit (fig. 47) les droites :

$$x - y = 0 \qquad x + 2y = 0 \qquad 2x + y - 3 = 0.$$

Ces droites partagent le plan en 7 régions, il suffit de déterminer pour

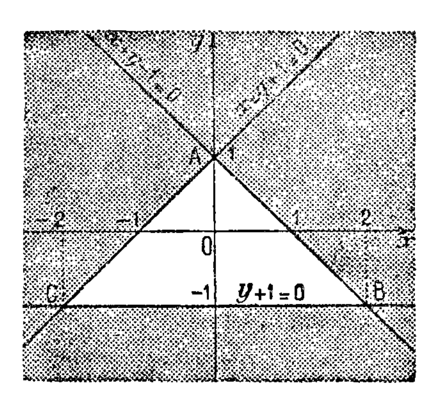


Fig. 46.

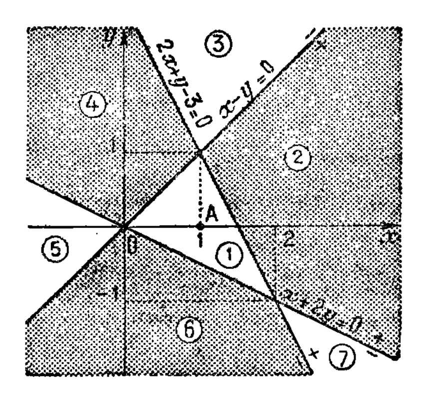


Fig. 47.

chacune d'elles le signe des facteurs du produit placé au premier membre de l'inéquation et d'éliminer les régions où ce produit est positif. On voit que l'inéquation est satisfaite par les coordonnées des points des régions (1), (3),(5) et (7).

EXERCICES

— Représenter graphiquement les équations suivantes :

599. $4x + 3y = -6$ 600. $5x - 3y = 15$

601. $6x - 2y = 18$ 602. $4x + 6y = 21$

603. $7x + 4y = 14$ 604. $8x - 5y = 20$

— Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

605. $\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$ 606. $\begin{cases} 6x + 4y = -12 \\ 9x + 6y = 18 \end{cases}$

607. $\begin{cases} 5x + 4y = 23 \\ 2x - 3y = 26 \end{cases}$

608. $\begin{cases} 7x + 4y = 14 \\ 3x - 2y = 19 \end{cases}$

609. $\begin{cases} 12x - 9y = 6 \\ 20x - 15y = 10 \end{cases}$

610. $\begin{cases} 4x + 2y = 24 \\ 8x - 3y = 3 \end{cases}$

611. Calculer les coordonnées des trois sommets d'un triangle ABC, sachant que les équations des côtés AB, BC et CA sont respectivement :

$$y = x + 5; \qquad 2x + y = 8 \qquad \text{et} \qquad x + 3y + 1 = 0.$$

612. Soient les trois points A $(+ 3, + 3)$, B $(- 1, + 1)$ et C $(+ 1, - 1)$. Déterminer les équations des côtés du parallélogramme ABCD. Calculer les coordonnées du sommet D.

613. Montrer que les trois droites d'équations :

$$x - 2y = - 4; \qquad x + y = 5 \qquad \text{et} \qquad 3x - y = 3$$

sont concourantes.

614. Même exercice pour les droites :

$$y = x + 1; \qquad y = 3x - 1 \qquad \text{et} \qquad y = - 2x + 4.$$

615. Montrer que quel que soit m la droite $(2x - y + 3) + m(x + 2y - 1) = 0$ passe par le point d'intersection des droites $2x - y + 3 = 0$ et $x + 2y - 1 = 0$.

Calculer m pour que cette droite ait pour coefficient angulaire 3.

616. Soit l'équation $(m + 1)x - y + m - 1 = 0$. Construire les droites correspondantes pour $m = - 2$, 0 et $+ 3$. Montrer que ces droites sont concourantes. Quelle valeur faut-il donner à m pour que la droite correspondante passe par le point $x = 7$, $y = 2$?

617. Un cycliste part d'une ville A à 8 h. du matin et roule à la vitesse de 24 km. à l'heure pendant 1 h. 20 m. Il s'arrête 10 m. et repart ensuite à 20 km. à l'heure.

1° Représenter graphiquement la marche du cycliste.

2° A quelle heure arrivera-t-il à la ville B située à 57 km. de A?

618. Le Sud-Express part de Paris à 11 h. 30 m. passe à Orléans (123 km.) à 12 h. 43 et arrive à Tours (235 km.) à 13 h. 41.

1° Représenter graphiquement la marche du train entre Paris et Tours.

2° Calculer la vitesse réalisée entre Paris et Orléans, puis entre Orléans et Tours.

619. Deux villes A et B sont distantes de 120 km. Un cycliste part de A vers B à 8 h. à la vitesse de 30 km. à l'heure. Il est suivi par un camion qui part à 9 h. et qui marche à 45 km. à l'heure et par une automobile qui part à 9 h. 20 et qui roule à 90 km. à l'heure.

1° Représenter graphiquement la marche des trois mobiles.

2° Quelles sont les heures d'arrivée en B et à quelle heure et à quelle distance de A le cycliste est-il doublé par l'un des deux autres mobiles?

620. Un automobiliste part à 13 h. pour effectuer une distance de 230 km. Il roule d'abord à 90 km. à l'heure puis ensuite à 60 km à l'heure. Il arrive à destination à 16 h. Trouver la distance parcourue à 90 km. à l'heure. Solution graphique.

621. Un cycliste part en promenade à 8 h. 20 et veut être de retour à midi. A l'aller sa vitesse est de 36 km à l'heure et au retour elle est de 30 km. à l'heure. A quelle distance de son point de départ devra-t-il faire demi-tour? Solution graphique.

622. Un rameur parcourt, en canot, 12 km. à l'heure en eau calme. Il part à 14 h. pour remonter une rivière dont le courant a une vitesse de 3 km. à l'heure. Quelle distance peut-il parcourir avant de faire demi-tour s'il veut être revenu au point de départ à 16 h,?

623. Deux localités A et B sont distantes de 100 km. A 9 h une automobile part de A et arrive en B à 10 h. 15, s'y arrête 30 m. et revient à la même vitesse qu'à l'aller. A 9 h. 20 un cycliste part de B pour A à la vitesse de 30 km. à l'heure. Étudier graphiquement les rencontres de l'automobile et du cycliste.

624. A 8 h. 30 un cycliste part d'une ville A pour une ville B distante de 60 km et roule à la vitesse de 30 km. à l'heure. Il s'arrête 20 m. après avoir parcouru 35 km. et repart à la même vitesse. Une automobile qui fait 90 km à l'heure part de B à 9 h. 10, arrive en A et repart aussitôt pour B. Etudier graphiquement les rencontres de l'automobile et du cycliste.

— Interpréter graphiquement les sytèmes d'inéquations simultanées:

625. $\begin{cases} 2x - 5y - 1 > 0 \\ 2x + y + 5 > 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$ **626.** $\begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y + 3 < 0 \\ x + y - 5 > 0 \end{cases}$

627. $\begin{cases} 3x - 2y - 4 < 0 \\ 4x + y + 5 > 0 \\ x - 2y + 6 > 0 \end{cases}$ **628.** $\begin{cases} 3x + 2y - 6 < 0 \\ x^2 - 4 < 0 \\ y^2 - 9 < 0 \end{cases}$

— Résoudre les inéquations

629. $x(x - y)(x + y - 2) < 0$ **630.** $(x - 3)(y + 2)(x - 2y) > 0.$

631. $(x^2 - 25)(4y^2 - 9) > 0$ **632.** $(4x^2 - 49)(9y^2 - 16) < 0.$

633. $(x^2 + y^2 - 1)^2 - 4x^2y^2 < 0$ **634.** $(x^2 + y^2 - 5)^2 - 4(xy + 2)^2 > 0.$

VINGT ET UNIÈME LEÇON

ÉTUDE DE LA FONCTION $y = ax^2$.

241. Étude de la fonction $y = x^2$.

On peut calculer y pour toutes les valeurs de x. *La fonction $y = x^2$ est donc définie quel que soit x.*

Donnons à x différentes valeurs, rangées dans l'ordre croissant et calculons les valeurs correspondantes de y.

x	-10	-5	-2	-1	0	1	2	3	.....
y	100	25	4	1	0	1	4	9	.....

On constate que pour $x < 0$ les valeurs de y vont en décroissant et que pour $x > 0$ elles vont en croissant.

242. Théorème. — *La fonction $y = x^2$ est décroissante lorsque x est négatif et elle est croissante lorsque x est positif.*

Ce théorème a déjà été démontré (n° 204). On peut également faire le raisonnement suivant :

Soient x_1 et x_2 deux valeurs particulières de x vérifiant l'inégalité :

$$x_1 < x_2 \qquad (1)$$

1° Si x_1 et x_2 sont tous deux négatifs, on peut élever au carré, les deux membres de l'inégalité précédente, à condition d'en changer le sens (n° 66).

Donc : $x_1^2 > x_2^2$ soit : $y_1 > y_2$.

Lorsque x est négatif, toute augmentation de x entraîne une diminution de y qui est donc fonction décroissante de x.

2° Si x_1 et x_2 sont tous deux positifs, on peut élever au carré les deux membres de l'inégalité (1) en conservant le même sens. Donc :

$$x_1^2 < x_2^2 \qquad \text{soit :} \qquad y_1 < y_2$$

ce qui montre que lorsque x est positif, y croît en même temps que x.

243. Valeurs particulières. Tableau de variation.

1° On voit que $y = x^2$ est toujours positif pour $x \neq 0$ et nul pour $x = 0$.

2° A deux valeurs de x opposées α et $-\alpha$ correspond pour y la même valeur α^2.

3° Si x devient infiniment grand en valeur absolue il en est de même de y. En effet pour obtenir $y > 1.000.000$ par exemple, il suffit de prendre $|x| > 1.000$.

On peut finalement dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y = x^2$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Lorsque x croît de $-\infty$ à 0, y décroît de $+\infty$ à 0 et lorsque x croît de 0 à $+\infty$, y croît de 0 à $+\infty$.

On dit que la fonction $y = x^2$ admet pour $x = 0$, un minimum égal à 0.

244. Représentation graphique de la fonction $y = x^2$.

Construisons sur un graphique les points représentatifs de différentes valeurs correspondantes de x et de y (fig. 48).

O(0; 0); A(1; 1); A'(− 1; 1); B(2; 4); B'(− 2; 4), etc...

Joignons tous ces points par une courbe continue, nous obtenons la représentation graphique de la fonction $y = x^2$. Cette courbe se nomme *parabole*.

Axe de symétrie. — Les points M et M' d'abscisses α et $-\alpha$ ont même ordonnée $y = \alpha^2$. Ils sont symétriques par rapport à Oy (Exemples : A et A', B et B', etc...). Il en résulte que la parabole $y = x^2$ admet Oy pour axe de symétrie. Le point O situé sur l'axe de symétrie se nomme le sommet de la parabole.

Fig. 48.

Tangente au sommet. — Considérons une sécante variable OM issue du sommet O et passant par le point M de coordonnées $x = \alpha$, $y = \alpha^2$ (fig. 49). Cette droite a une équation de la forme $y = ax$ (n° 230). Puisqu'elle passe par M on doit avoir :

$$\alpha^2 = a\alpha \quad \text{d'où :} \quad a = \alpha.$$

Soit finalement l'équation de la droite OM : $y = \alpha x$.

Lorsque le point M se déplace sur la courbe et vient se confondre avec le point O, son abscisse α tend vers zéro et la position limite de la sécante OM

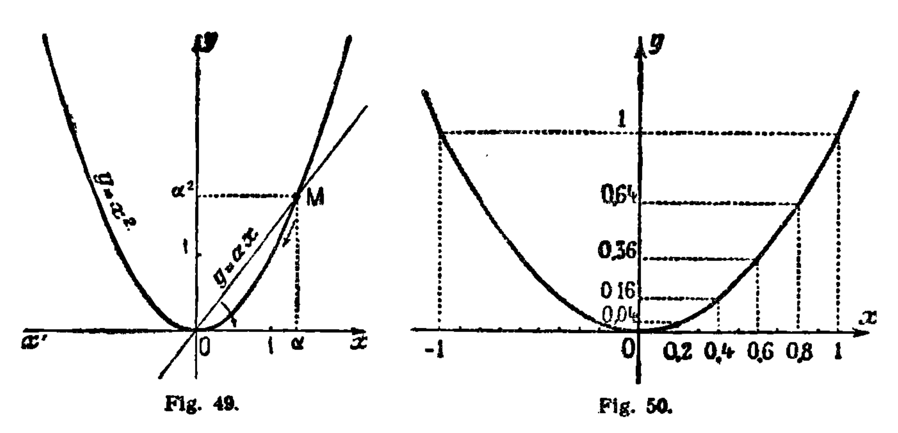


Fig. 49. Fig. 50.

a pour équation : $y = 0$. Or cette équation est celle de l'axe $x'x$. On en conclut que la tangente en O à la parabole $y = x^2$ est la droite $x'x$.

245. Résumé. — ***La courbe $y = x^2$ est une parabole de sommet O, admettant $y'y$ pour axe de symétrie et $x'x$ pour tangente au sommet.***

En construisant la courbe à une plus grande échelle (fig. 50), on met en évidence la forme arrondie de la parabole au voisinage de son sommet.

246. Étude de la fonction $y = ax^2$.

La fonction $y = ax^2$ est définie pour toutes les valeurs de x, car on peut quel que soit x, calculer x^2 puis le produit ax^2.

D'autre part (n° 216) la fonction $y = ax^2$ varie dans le même sens que la fonction $y = x^2$ si a est positif ou en sens contraire de cette fonction si a est négatif. Donc :

1° $a > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y = ax^2$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Lorsque x croît de $-\infty$ à 0, y décroît de $+\infty$ à 0 et lorsque x croît de 0 à $+\infty$, y croît de 0 à $+\infty$.

On voit que pour $x = 0$, y passe par un minimum égal à 0 et que pour $x \neq 0$, y est positif.

2° $a < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y = ax^2$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Lorsque x croît de $-\infty$ à 0, y croît de $-\infty$ à 0 et lorsque x croît de 0 à $+\infty$, y décroît de 0 à $-\infty$.

Pour $x = 0$, y passe par un maximum égal à 0 et pour $x \neq 0$, y est négatif

247. Représentation graphique.

1° *a* POSITIF. — Supposons tracée la parabole $y = x^2$. Pour obtenir la courbe $y = 2x^2$ il suffit, pour chaque valeur de x, de multiplier par 2, l'ordonnée du point correspondant de la courbe $y = x^2$ (fig. 51). La courbe obtenue est une parabole semblable à la parabole $y = x^2$, mais moins évasée.

On obtiendrait de même la courbe $y = \frac{1}{4}x^2$ en divisant par 4, chacune des ordonnées de la courbe $y = x^2$. La parabole obtenue est cette fois plus évasée que la courbe $y = x^2$.

2° *a* NÉGATIF. La courbe $y = -x^2$ est une parabole symétrique de la courbe

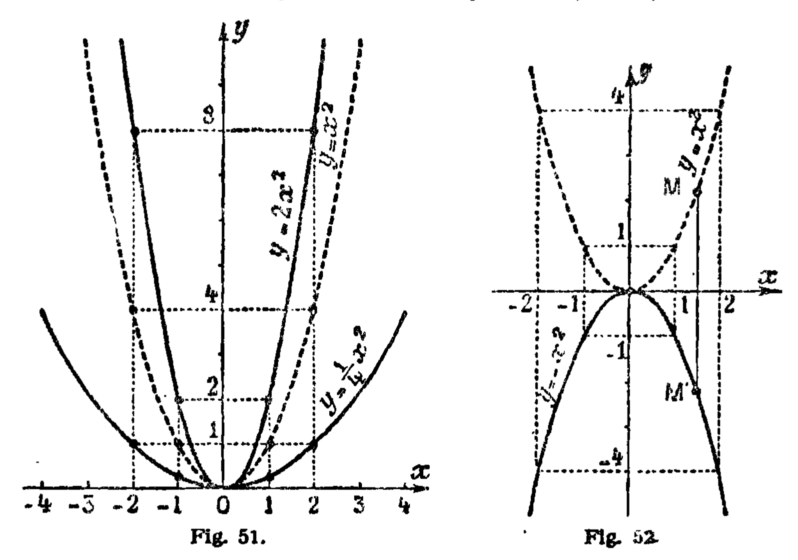


Fig. 51. Fig. 52.

$y = x^2$ par rapport à $x'x$ (fig. 52). En effet pour chaque valeur de x les ordonnées correspondantes x^2 et $-x^2$ sont opposées et correspondent à des points M et M' symétriques par rapport à $x'x$.

De même les courbes $y = -2x^2$, $y = -\frac{1}{4}x^2$ sont des paraboles symétriques par rapport à $x'x$ des paraboles $y = 2x^2$, $y = -\frac{1}{4}x^2$ (fig. 53).

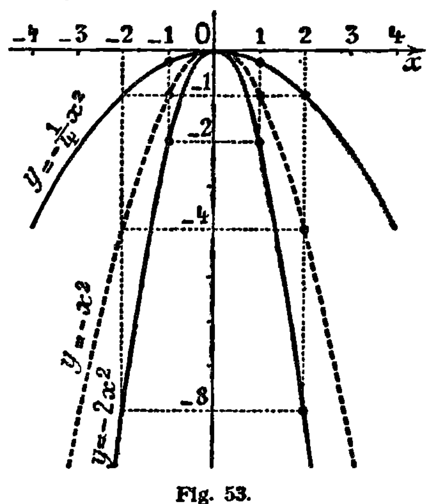


Fig. 53.

On démontre comme pour la courbe $y = x^2$ que :

248. ***La courbe $y = ax^2$ est une parabole de sommet O admettant l'axe $y'y$ comme axe de symétrie et l'axe $x'x$ comme tangente au sommet.***

On peut ajouter que la courbe tourne sa concavité du côté des y positifs si a est positif et du côté des y négatifs si a est négatif. D'autre part la courbe est d'autant plus évasée que a est petit en valeur absolue.

249. Remarque. — Si on n'adopte pas la même échelle de graduation pour les deux axes, la courbe $y = ax^2$ conserve les mêmes caractéristiques.

Si par exemple on prend sur $y'y$ une unité trois fois plus grande que sur $x'x$, cela revient à prendre, pour chaque valeur de x, une ordonnée trois fois plus grande et à remplacer la courbe $y = ax^2$ par la courbe $y = 3ax^2$ qui a les mêmes caractéristiques.

EXERCICES

— Représenter graphiquement les fonctions :

635. $y = \frac{x^2}{3}$ **636.** $y = -\frac{x^2}{2}$ **637.** $y = \frac{3}{4}x^2$

638. $y = \frac{3}{2}x^2$ **639.** $y = -\frac{5}{3}x^2$ **640.** $y = -\frac{5}{4}x^2$.

641. Déterminer le coefficient a de façon que la parabole $y = ax^2$ passe par le point A ($x = +3$; $y = -4{,}5$). Construire cette courbe.

642. On considère le point A (0,1) et la droite (D) d'équation $y = -1$. Soit M(x, y) un point du plan et B sa projection sur la droite (D).

1° Calculer $\overline{MA}^2$ et $\overline{MB}^2$ en fonction de x et y.

2° On suppose MA = MB. Trouver la relation entre y et x et le lieu du point M.

643. Un triangle isocèle OAB a pour base AB = 6 cm. et pour hauteur OH = 5 cm. On considère sur OH un point M tel que OM = x et on mène par ce point la parallèle à AB qui coupe OA et OB en C et D. Calculer en fonction de x et représenter graphiquement la variation de l'aire y du triangle OCD lorsque M décrit OH.

644. On considère un demi-cercle de diamètre AB = 10 cm. et une corde variable AM = x. Calculer et représenter graphiquement la longueur y de la projection AH de AM sur AB lorsque le point M parcourt le demi-cercle.

645. On donne un segment AO = 4 cm. Sur la perpendiculaire en O à ce segment on prend un point M variable et on pose OM = x. La perpendiculaire en M à AM coupe AO en B. Calculer et représenter graphiquement la variation de y = OB en fonction de x.

646. Soit un angle droit uOv. On prend un point M variable sur Ou et un point fixe A de Ov tel que OA = 3 cm. Le cercle passant par A et tangent à Ou en M recoupe Ov en B. Calculer et représenter graphiquement la variation de y = OB en fonction de OM = x.

VINGT-DEUXIÈME LEÇON

ÉTUDE DE LA FONCTION $y = \frac{1}{x}$.

250. Étude de la fonction $y = \frac{1}{x}$.

La valeur de x étant donnée, nous pourrons calculer celle de y sauf cependant si $x = 0$. *La fonction* $y = \frac{1}{x}$ *est donc définie dans les deux intervalles* $(-\infty, 0)$ *et* $(0, +\infty)$. *Elle n'est pas définie pour* $x = 0$.

Comme le produit xy est égal à $+1$, x et y sont toujours de même signe.

251. Théorème. — ***La fonction*** $y = \frac{1}{x}$ ***est décroissante dans chacun des intervalles où elle est définie.***

Donnons à x deux valeurs de même signe x_1 et x_2 telles que

$$x_1 < x_2.$$

Divisons les deux membres par le produit positif x_1x_2, nous obtenons

$$\frac{x_1}{x_1x_2} < \frac{x_2}{x_1x_2}.$$

D'où $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$ c'est-à-dire $y_1 > y_2$.

La fonction $y = \frac{1}{x}$ est donc décroissante quand x varie en conservant le même signe.

Autrement dit : ***Lorsqu'un nombre augmente sans changer de signe son inverse diminue.***

252. Valeurs particulières. — ***Lorsque x augmente indéfiniment en valeur absolue y tend vers zéro et inversement lorsque x tend vers zéro, y augmente indéfiniment en valeur absolue.***

On peut en effet donner à $|x|$ une valeur suffisamment grande pour obtenir pour $|y|$ une valeur aussi voisine de 0 que l'on veut. Ainsi pour obtenir $|y| < \frac{1}{1.000}$ il suffit de prendre $|x| > 1.000$. Si on désigne par ε un nombre positif arbitraire aussi voisin que l'on veut de zéro, on peut écrire que :

Pour $x = \pm \infty$, on a : $y = \pm \varepsilon$.

On verrait de même que pour $x = \pm \varepsilon$, on a : $y = \pm \infty$.

253. Tableau de variation. — On voit donc finalement que :
Lorsque x croît de $-\infty$ à $-\varepsilon$, y décroît de $-\varepsilon$ à $-\infty$.
Lorsque x croît de $+\varepsilon$ à $+\infty$, y décroît de $+\infty$ à $+\varepsilon$.
Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\varepsilon$	0	$+\varepsilon$		$+\infty$
y	$-\varepsilon$	↘	$-\infty$	‖	$+\infty$	↘	$+\varepsilon$

Le double trait vertical, indique que pour $x = 0$ la fonction n'est pas définie.

254. Représentation graphique de la fonction $y = \frac{1}{x}$.

Donnons à x différentes valeurs et calculons y. Nous obtenons si x est positif.

x	1/3	1/2	1	2	3
y	3	2	1	1/2	1/3

Et si x est négatif

x	-3	-2	-1	$-1/2$	$-1/3$
y	$-1/3$	$-1/2$	-1	-2	-3

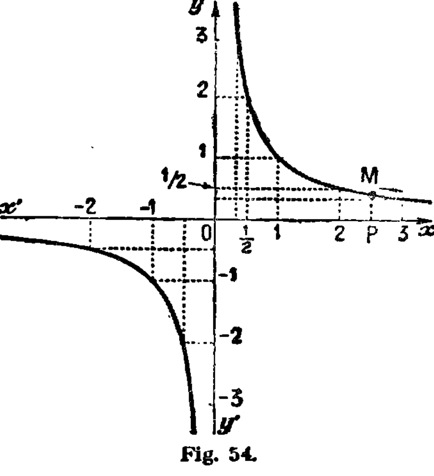


Fig. 54.

Construisons, dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires les points représentatifs des couples de nombres trouvés (fig. 54). Joignons ces points par une courbe. Nous obtenons une première branche de courbe située dans le premier quadrant xOy correspondant aux points de coordonnées positives et une seconde branche dans le troisième quadrant $x'Oy'$ correspondant aux points de coordonnées négatives.

L'ensemble de ces deux branches de courbe qui constitue ***la courbe représentative de la fonction*** $y = \frac{1}{x}$ ***se nomme hyperbole équilatère.***

La courbe ne peut être tracée en entier d'un trait continu car elle ne traverse pas l'axe $y'y$. On dit que la fonction $y = \frac{1}{x}$ *est discontinue pour* $x = 0$.

255. Symétries de la courbe. — 1° ***L'origine des coordonnées est un centre de symétrie.*** Considérons sur l'hyperbole deux points M et M′ d'abscisses opposées : $\overline{OA} = \alpha$ et $\overline{OA'} = -\alpha$. Les ordonnées $\overline{OB} = \frac{1}{\alpha}$ et $\overline{OB'} = -\frac{1}{\alpha}$ sont également opposées (fig. 55). Les deux rectangles OAMB et OA′M′B′ sont égaux et symétriques par rapport au point O et les deux sommets homologues M et M′ sont donc symétriques par rapport au point O. Si le point M décrit l'une des branches de la courbe le point M′ décrit l'autre branche.

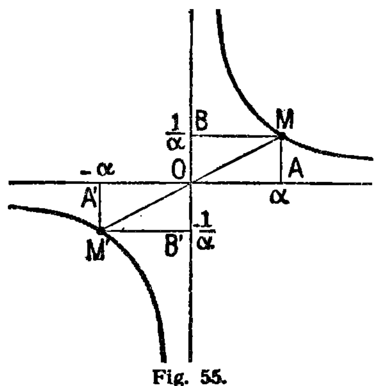


Fig. 55.

L'hyperbole admet donc le point O comme centre de symétrie.

2° ***La première bissectrice est un axe de symétrie transverse.*** Considérons sur l'hyperbole le

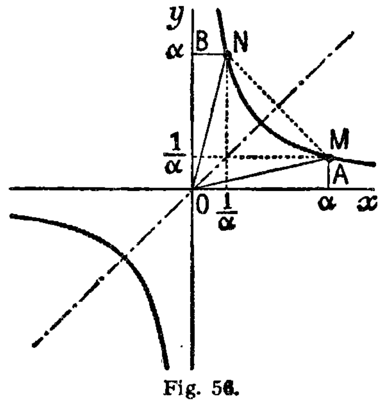


Fig. 56.

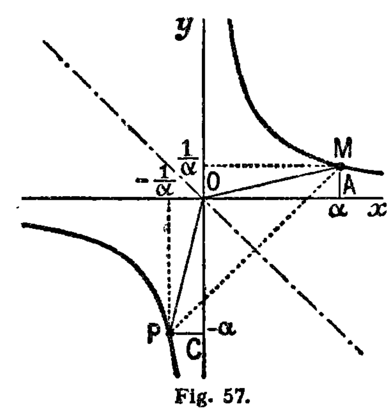


Fig. 57.

point M $\left(x = \overline{OA} = \alpha,\ y = \overline{AM} = \frac{1}{\alpha}\right)$ et le point N $\left(x = \overline{BN} = \frac{1}{\alpha}\right.$

$y = \overline{OB} = \alpha$). Les deux triangles rectangles OAM et OBN (fig. 56) ayant les côtés de l'angle droit égaux sont égaux. Ils se superposent si on plie la figure suivant la première bissectrice et M vient en N. Il en est de même de tout autre point de la courbe qui admet donc cette bissectrice pour axe de symétrie. On voit d'ailleurs que cet axe coupe la courbe aux deux points ($x = 1$, $y = 1$) et ($x = -1$, $y = -1$) et que chacune des deux branches est à elle-même sa propre symétrique.

3° ***La seconde bissectrice est un axe de symétrie non transverse.*** On démontrerait de même (fig. 57) que les points M $\left(x = \alpha,\ y = \frac{1}{\alpha}\right)$ et P $\left(x = -\frac{1}{\alpha},\ y = -\alpha\right)$ **sont symétriques par rapport à la seconde bissectrice.** Cette droite perpendiculaire à la précédente est le second axe de symétrie de l'hyperbole. Une branche de la courbe est symétrique de l'autre branche, et comme l'axe se trouve dans les quadrants II et IV, il ne rencontre pas la courbe.

256. Asymptotes. — Considérons un point M de l'hyperbole situé dans le premier quadrant et supposons qu'il s'éloigne indéfiniment vers la droite (fig. 54). Son abscisse $\overline{OP}$ devient infiniment grande et son ordonnée devient infiniment petite en valeur absolue. Par suite la distance MP du point M à la droite $x'x$ devient infiniment petite et peut être rendue aussi voisine de zéro que l'on veut. On dit que ***l'hyperbole*** $y = \frac{1}{x}$ ***admet l'axe*** $x'x$ ***pour asymptote.***

En raison des symétries de la courbe, on voit que cette première branche admet également $y'y$ pour asymptote et que la seconde branche admet aussi $x'x$ et $y'y$ pour asymptotes.

257. Résumé. — ***La courbe*** $y = \frac{1}{x}$ ***est une hyperbole équilatère admettant pour asymptotes les axes de coordonnées et située dans les quadrants*** I ***et*** III.

L'origine est le centre de symétrie de la courbe et les bissectrices des angles formés par les axes sont les axes de symétrie de cette hyperbole.

EXERCICES

647. On considère un angle droit xOy. On prend un point A sur Ox et un point B sur Oy et on termine le rectangle AOBM. Trouver le lieu géométrique du point M de façon que le rectangle ait une surface de 1 cm².

648. Un triangle isocèle variable a une surface constante de 0 m² 50. Calculer et représenter graphiquement les variations de sa hauteur y en fonction de sa base x.

649. Soit un cercle de diamètre AB = 2 cm. Une tangente mobile coupe en M et N les tangentes en A et B orientées dans le même sens. On pose $\overline{AM} = x$ et $\overline{BM} = y$. Calculer et représenter les variations de y en fonction de x.

Déterminer x pour que l'on ait $y = 2$ cm. 5.

650. On considère un cercle de diamètre AB = 2 cm. 5 et le point P de AB tel que AP = 0 cm. 5. Une sécante variable issue de P coupe le cercle en M et N. On pose PM = x et PN = y. Calculer et représenter graphiquement y en fonction de x. Limiter le graphique.

651. Soit un cercle de diamètre AB = 15 cm. On prolonge ce diamètre d'unt longueur BP = 5 cm. et on mène une sécante variable PMN.

1° Calculer en désignant par x la longueur PM et par y la longueur PN exprimées en décimètres la relation entre x et y.

2° Représenter graphiquement les variations de y en fonction de x en limitane le graphique.

VINGT-TROISIÈME LEÇON

ÉTUDE DE LA FONCTION $y = \frac{a}{x}$

258. Étude de la variation. — 1er EXEMPLE: $y = \frac{4}{x}$.

Nous pouvons calculer y pour toutes les valeurs de x, sauf cependant pour $x = 0$. Donnons à x différentes valeurs classées dans l'ordre croissant et calculons y

x	$-\infty$	-4	-2	-1	$-\varepsilon$	0	$+\varepsilon$	1	2	4	$+\infty$
y	$-\varepsilon$	-1	-2	-4	$-\infty$	‖	$+\infty$	4	2	1	$+\varepsilon$

Nous constatons que les valeurs de y sont de même signe que celles de x et vont en décroissant.

2e EXEMPLE: $y = -\frac{2}{x}$.

Nous pouvons de même calculer y sauf pour $x = 0$. Nous obtenons :

x	$-\infty$	-4	-2	-1	$-\varepsilon$	0	$+\varepsilon$	1	2	4	$+\infty$
y	$+\varepsilon$	$0{,}5$	1	2	$+\infty$	‖	$-\infty$	-2	-1	$-0{,}5$	$-\varepsilon$

Nous constatons cette fois que les valeurs de y sont du signe opposé à celles de x et vont en croissant.

259. Cas général. — ***La fonction*** $y = \frac{a}{x}$ ***est définie dans les intervalles*** $(-\infty, -\varepsilon)$ ***et*** $(+\varepsilon, +\infty)$***. Elle n'est pas définie pour*** $x = 0$.

Elle est décroissante dans chacun des intervalles où elle est définie si a ***est positif. Elle est croissante dans chacun de ces intervalles si*** a ***est négatif.***

En effet $y = \frac{1}{x} \times a$. La valeur de y s'obtient donc en multipliant $\frac{1}{x}$ par a. On en déduit que la fonction $\frac{a}{x}$ varie dans le même sens que $\frac{1}{x}$ ou en sens

contraire suivant que a est positif ou négatif (n° 216). Elle est donc décroissante si a est positif et croissante si a est négatif.

Il est clair que x et y sont de même signe si a est positif et de signes contraires si a est négatif. D'autre part si x devient infiniment grand en valeur absolue, $\frac{1}{x}$ devient infiniment petit en valeur absolue et il en est de même de y et inversement si x devient infiniment petit y devient infiniment grand.

260. Tableau de variation. — On voit finalement que :

1° Pour $a > 0$. ***Lorsque** x **croît de** $-\infty$ **à** $-\varepsilon$, y **décroît de** $-\varepsilon$ **à** $-\infty$ **et lorsque** x **croît de** $+\varepsilon$ **à** $+\infty$, y **décroît de** $+\infty$ **à** $+\varepsilon$.*

x	$-\infty$		$-\varepsilon$	0	$+\varepsilon$		$+\infty$
$y = \frac{a}{x}$	$-\varepsilon$	↘	$-\infty$	‖	$+\infty$	↘	$+\varepsilon$

2° Pour $a < 0$. ***Lorsque** x **croît de** $-\infty$ **à** $-\varepsilon$, y **croît de** $+\varepsilon$ **à** $+\infty$ **et lorsque** x **croît de** $+\varepsilon$ **à** $+\infty$, y **croît de** $-\infty$ **à** $-\varepsilon$*

x	$-\infty$		$-\varepsilon$	0	$+\varepsilon$		$+\infty$
$y = \frac{a}{x}$	$+\varepsilon$	↗	$+\infty$	‖	$-\infty$	↗	$-\varepsilon$

261. Représentation graphique.

1er Exemple : $y = \frac{4}{x}$.

En partant du tableau de valeurs (n° 258), on peut construire la courbe représentative (fig. 58). On peut aussi, puisque $y = \frac{1}{x} \times 4$, déduire cette courbe de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ en multipliant, pour chaque valeur de x, l'ordonnée correspondante par 4 (ou pour chaque valeur de y, l'abscisse correspondante par 4).

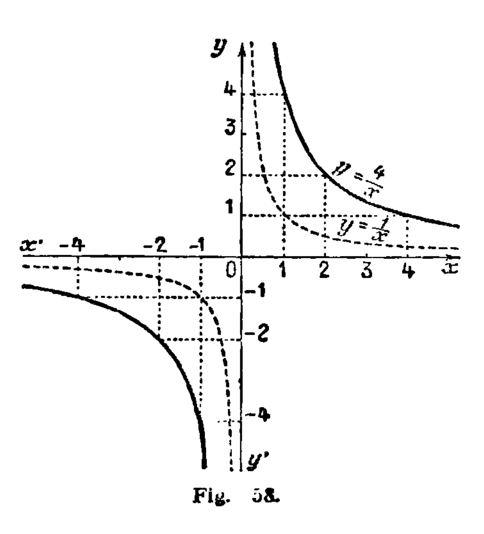


Fig. 58.

La courbe obtenue est une *hyperbole équilatère* qui a même allure que la courbe $y = \frac{1}{x}$ mais plus éloignée des axes.

Tout ce qui a été établi au point de vue des symétries et des asymptotes pour la courbe $y = \frac{1}{x}$ se démontre de la même façon pour la courbe $y = \frac{4}{x}$.

2e Exemple : $y = \frac{1}{2x}$. La courbe se déduit de même de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ en multipliant pour chaque valeur de x l'ordonnée correspondante par 1/2. L'hyperbole obtenue est cette fois plus rapprochée des axes que la précédente.

3o Exemple : $y = -\frac{4}{x}$. Supposons tracée l'hyperbole $y = \frac{4}{x}$. Pour chaque valeur de x les ordonneés $y = \frac{4}{x}$ et $y = -\frac{4}{x}$ sont opposées. La courbe $y = -\frac{4}{x}$ est donc symétrique de la courbe $y = \frac{4}{x}$ par rapport à $x'x$ (fig. 59). C'est donc une *hyperbole équilatère* égale à la précédente mais située dans les quadrants II et IV. Elle admet les mêmes asymptotes et les mêmes symétries mais cette fois c'est la seconde bissectrice qui est l'axe de symétrie transverse.

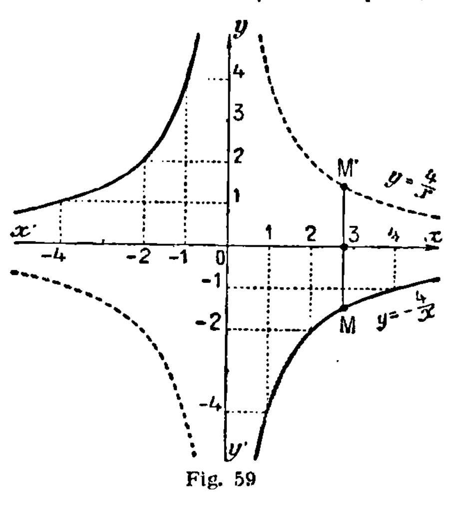


Fig. 59

En général :

262. ***La courbe $y = \frac{a}{x}$ est une hyperbole équilatère admettant pour asymptotes les axes de coordonnées. Elle est située dans les quadrants I et III quand a est positif et dans les quadrants II et IV quand a est négatif.***

Elle admet pour centre de symétrie le point de rencontre des asymptotes et pour axes de symétrie les bissectrices des angles formés par les asymptotes.

Notons que la courbe est d'autant plus éloignée de ses asymptotes que le coefficient a est grand en valeur absolue.

263. Remarque. — L'hyperbole précédente conserve toutes ses caractéristiques, même si on n'adopte pas la même unité sur les deux axes de coordonnées. Si par exemple on prend sur $y'y$ une unité trois fois plus grande que sur $x'x$, cela revient à multiplier pour chaque valeur de x, l'ordonnée correspondante par 3, et par suite à remplacer la courbe $y = \frac{a}{x}$ par la courbe $y = \frac{3a}{x}$ (avec l'unité choisie sur $x'x$), qui a les mêmes caractéristiques.

264. Nombres inversement proportionnels. — La relation $y = \frac{a}{x}$ équivaut à $xy = a$ et s'écrit $y = a \times \frac{1}{x}$ ou $x = a \times \frac{1}{y}$.

Désignons par x' l'inverse de x, on a : $y = ax'$. Autrement dit (n° 221) y est proportionnel à l'inverse de x. Lorsqu'on multiplie la valeur de x pour 2, 3 ou n, celle de y est divisée par 2, 3 ou n.

On dit que y est inversement proportionnel à x et on voit de même que x est inversement proportionnel à y.

DÉFINITION. — ***Deux nombres variables x et y sont inversement proportionnels si chacun d'eux est proportionnel à l'inverse de l'autre et par suite si leur produit est un nombre constant.***

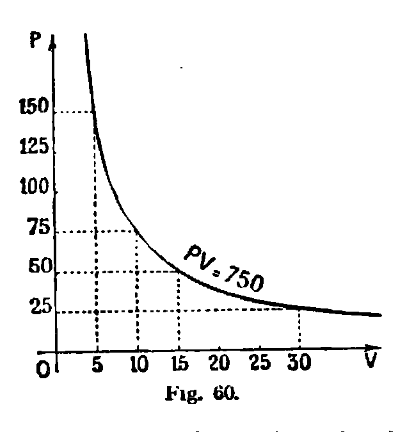


Fig. 60.

Lorsque x et y sont les mesures correspondantes de deux grandeurs dépendant l'une de l'autre, ***ces grandeurs sont dites inversement proportionnelles.***

EXEMPLES. — 1° *La durée d'un trajet donné est inversement proportionnelle à la vitesse du mobile qui effectue ce trajet.* Si la vitesse devient 2, 3... n fois plus grande, la durée devient 2, 3... n fois plus petite.

2° *La largeur d'un rectangle dont la surface est donnée est inversement proportionnelle à sa longueur. Le volume immergé d'un corps donné, flottant à la surface d'un liquide est inversement proportionnel à la densité de ce liquide*, etc...

265. Application : Loi de Mariotte. — On établit en Physique que *A une température donnée, le produit du volume d'une certaine masse gazeuse par sa pression est un nombre constant.*

Autrement dit, le volume et la pression de cette masse de gaz sont inversement proportionnels.

Soit par exemple un volume d'air de 10 cm³ à la pression de 75 cm. de mercure. Si la température reste constante nous aurons entre la pression P et le volume V de cette masse d'air la relation :

$$PV = 750 \qquad \text{ou} \qquad P = \frac{750}{V}.$$

La courbe représentant les variations de la pression en fonction du volume est une branche d'hyperbole équilatère (fig. 60).

EXERCICES

— Étudier et représenter graphiquement les fonctions :

652. $y = \frac{3}{x}$ **653.** $y = \frac{1}{3x}$ **654.** $y = -\frac{1}{2x}$

655. $y = -\frac{3}{x}$ **656.** $y = -\frac{2}{x}$ **657.** $y = \frac{3}{2x}$

658. $y = \frac{2}{3x}$ **659.** $y = -\frac{4}{3x}$ **660.** $y = \frac{7}{5x}$

661. Soit un cercle de diamètre AB = 4 cm. et un point P situé à 4 cm. du centre de ce cercle. Une sécante variable issue de P coupe le cercle en M et N. On pose PM = x et PN = y. Calculer et représenter graphiquement y en fonction de x.

662. Soit un angle AOB tel que OA = 3 cm. Un cercle variable tangent en A à OA coupe OB en M et N. Calculer et représenter graphiquement ON = y en fonction de OM = x.

663. Soit un rectangle ABCD tel que AB = 3 cm. et BC = 2 cm. On prend sur la droite AB un point M et on pose AM = x. La droite DM coupe la droite BC en N. Calculer et représenter graphiquement y = CN en fonction de x.

664. On considère un cercle de diamètre AB = 5 cm. et un point M variable de ce demi-cercle. Les droites BM et AM coupent en A' et B' les tangentes en A et B orientées dans le même sens. Calculer et représenter graphiquement $\overline{BB'} = y$ en fonction de $\overline{AA'} = x$.

665. Représenter graphiquement les variations du volume d'une masse d'air en fonction de sa pression sachant qu'à la pression de 76 cm³ de mercure elle occupe un volume de 15 cm³.

666. 1° Simplifier l'expression : $Y = \dfrac{\dfrac{X+a}{X-a} - \dfrac{X-a}{X+a}}{1 - \dfrac{X-a}{X+a}}$

2° Déterminer X de façon que Y = a.

3° Si $a = 1$, remplacer dans l'expression simplifiée X par $x + 1$ et Y par $y + 2$. Calculer y en fonction de x et représenter graphiquement les variations de y lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$

LIVRE IV. — LE SECOND DEGRÉ

VINGT-QUATRIÈME LEÇON

ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

266. Définition. — ***On appelle équation du second degré en x toute équation entière qui se ramène à la forme générale :***

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Les coefficients a, b et c sont des nombres connus. b et c peuvent être nuls mais nous devons supposer $a \neq 0$ sinon l'équation serait du premier degré.

EXEMPLES : $2x^2 - 5x + 3 = 0$, $4x^2 - 7x = 0$, $2x^2 - 9 = 0$.

267. Équations se ramenant au premier degré. — 1° Toute équation de la forme $A.B = 0$ a pour racines celles des deux équations $A = 0$ et $B = 0$ (n° 141).

EXEMPLE. — L'équation $(2x + 5)(x - 4) = 0$

se décompose en : $\begin{cases} 2x + 5 = 0 & \text{racine : } x' = -\dfrac{5}{2} \\ x - 4 = 0 & \text{racine : } x'' = 4. \end{cases}$

2° Toute équation de la forme $A^2 - B^2 = 0$

s'écrit : $(A + B)(A - B) = 0$

et se décompose en : $A + B = 0$ et $A - B = 0$.

EXEMPLE. — L'équation $(2x + 3)^2 - (x - 6)^2 = 0$

s'écrit : $(2x + 3 + x - 6)(2x + 3 - x + 6) = 0$

$$(3x - 3)(x + 9) = 0.$$

D'où les deux racines : $x' = 1$ et $x'' = -9$.

— Chaque fois qu'une équation se présente sous l'une des formes précédentes sa résolution est immédiate et il est maladroit de la ramener à la forme générale.

268. Résolution de l'équation : $ax^2 + bx = 0$.

Cette équation s'écrit : $x(ax + b) = 0$.

Elle admet toujours deux racines $x' = 0$ et $x'' = -\frac{b}{a}$.

EXEMPLES :

1° $3x^2 - 15x = 0$ ou $x(3x - 15) = 0$ racines : $x' = 0$; $x'' = 5$.

2° $2x^2 + 7x = 0$ ou $x(2x + 7) = 0$ racines : $x' = 0$; $x'' = -\frac{7}{2}$.

269. Résolution de l'équation : $ax^2 + c = 0$.

L'équation peut s'écrire, puisque $a \neq 0$:

$$x^2 + \frac{c}{a} = 0.$$

1° *Si a et c sont de même signe*, le premier membre est la somme d'un nombre positif ou nul x^2 et du nombre positif $\frac{c}{a}$: il est donc positif quel que soit x et ne peut être nul. *L'équation est impossible.*

2° *Si a et c sont de signes contraires*, $-\frac{c}{a}$ est positif et égal à $\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2$. L'équation s'écrit :

$$x^2 - \left(-\frac{c}{a}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - \left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2 = 0.$$

Le premier membre est la différence de deux carrés et on a :

$$\left(x + \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x - \sqrt{-\frac{c}{a}}\right) = 0.$$

L'équation a donc deux racines :

$$x' = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{et} \quad x'' = +\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{soit } x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

EXEMPLES :

1° $2x^2 + 5 = 0$ est impossible.

2° $4x^2 - 9 = 0$ ou $x^2 = \frac{9}{4}$ a deux racines $x = \pm\frac{3}{2}$.

3° $x^2 - 12 = 0$ ou $x^2 = 12$ a deux racines $x = \pm 2\sqrt{3}$.

270. Résolution d'une équation complète. — Soit à résoudre l'équation :

$$3x^2 - 8x + 5 = 0.$$

Cette équation s'écrit : $x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{5}{3} = 0.$

Or $x^2 - \frac{8}{3}x$ est le début du développement du carré de $x - \frac{4}{3}\cdot$ En effet

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}.$$

D'où
$$x^2 - \frac{8}{3}x = \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}$$

et l'équation s'écrit :

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} + \frac{5}{3} = 0 \quad \text{ou} \quad \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} = 0.$$

Soit
$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0.$$

Le premier membre se décompose en un produit de deux facteurs :

$$\left(x - \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0$$

ou
$$(x - 1)\left(x - \frac{5}{3}\right) = 0.$$

L'équation admet donc deux racines : $x' = 1$ et $x'' = \frac{5}{3}\cdot$

271. Résolution de l'équation générale :

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Divisons les deux membres par a ce qui est possible puisque $a \neq 0$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0. \qquad (2)$$

Or x^2 et $\frac{b}{a}x$ sont les deux premiers termes du carré d'une somme dont le premier terme est x. Le double produit est $\frac{b}{a}x$, le second terme est donc $\frac{b}{2a}\cdot$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

ce qui donne :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\cdot$$

L'équation (2) s'écrit donc :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0.$$

Soit finalement : $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0. \qquad (3)$$

1er **Cas** : $b^2 - 4ac > 0$. L'équation (3) peut s'écrire :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0.$$

Le premier membre est la différence de deux carrés, il se décompose en un produit de deux facteurs. On obtient :

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

ou

$$\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0.$$

L'équation a donc deux racines distinctes :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Soit en abrégé : $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2e **Cas** : $b^2 - 4ac = 0$. L'équation (3) devient :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Donc $$x + \frac{b}{2a} = 0 \quad \text{et} \quad x = -\frac{b}{2a}.$$

L'*équation a donc une seule racine.* Or l'application des formules trouvées précédemment donne :

$$x' = \frac{-b + 0}{2a} = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b - 0}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

Nous conviendrons, pour cette raison de dire, que l'équation admet *deux racines confondues* ou *une racine double*

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}.$$

3e **Cas** : $b^2 - 4ac < 0$. L'équation (3) s'écrit :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0.$$

Comme $4ac - b^2$ est positif, le premier membre est la somme d'un carré

(positif ou nul) et d'un nombre positif. Il est positif quel que soit x et ne peut être nul.

L'équation est donc impossible.

REMARQUE. — On peut aussi écrire l'équation sous la forme

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Il est clair que cette équation n'est possible que si le second membre est positif ou nul. En prenant les racines carrées de chacun des deux membres, on obtient (nº 40) en faisant attention de ne pas oublier le double signe $\pm$:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{soit} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

272. Résumé. — Le nombre des racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dépend du signe de l'expression $b^2 - 4ac$. Cette expression se nomme le *discriminant de l'équation* et on la représente par la lettre grecque Δ.

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

$\Delta > 0$	*Deux racines distinctes :*	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$
$\Delta = 0$	*Une racine double :*	$x = -\dfrac{b}{2a}.$
$\Delta < 0$	*Pas de racines.*	

273. Remarque. — ***Lorsque a et c sont de signes contraires l'équation admet deux racines distinctes.***

En effet, dans ce cas le produit ac est négatif et $-4ac$ est positif.

Comme b^2 est positif ou nul, la somme $b^2 - 4ac$ est obligatoirement positive.

274. Simplification de la formule de résolution. — Lorsque le coefficient c est pair ou contient en évidence le facteur 2, on peut poser $b = 2b'$ en désignant par b' la moitié de b. On a :

$$b^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac).$$

D'où :

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = 2\sqrt{b'^2 - ac}.$$

L'expression des racines devient :

$$x = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a}.$$

Soit en simplifiant :

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

On pose $\Delta' = b'^2 - ac$. Δ' est du même signe que Δ car $\Delta = 4\Delta'$ et se nomme le *discriminant réduit.*

275. Applications.

1° *Résoudre l'équation :* $x^2 - 5x + 3 = 0$.

$a = 1, b = -5, c = 3$ et $\Delta = 25 - 12 = 13$.

L'équation a pour racines: $x' = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ et $x'' = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$.

2° *Résoudre l'équation :* $5x^2 + 14x - 24 = 0$.

$a = 5$, $b' = 7$ et $c = -24$. L'équation a deux racines car a et c sont de signes contraires. $\Delta' = 49 + 120 = 169 = 13^2$.

Donc : $x = \frac{-7 \pm 13}{5}$ soit $x' = \frac{6}{5}$ et $x'' = -4$.

3° *Résoudre l'équation :* $9x^2 - 30x + 25 = 0$.

$\Delta' = 15^2 - 9 \times 25 = 225 - 225 = 0$. L'équation a une racine double

$$x = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}.$$

4° *Résoudre l'équation :* $3x^2 + 7x + 5 = 0$.

$\Delta = 7^2 - 4 \times 3 \times 5 = 49 - 60 = -11$. L'équation n'a pas de racines.

EXERCICES

— Résoudre les équations suivantes

667. $3x^2 - 7x = 0$

668. $33x^2 + 55x = 0$.

669. $(x + 3)^2 - 4(x + 3) = 0$

670. $x^2 - 4 + 3(x + 2) = 0$.

671. $x^2 - 81 = 0$

672. $49x^2 - 121 = 0$.

673. $(x - 7)^2 - 25 = 0$

674. $(2x + 3)^2 - 64 = 0$.

675. $(3x - 2)^2 - 48 = 0$

676. $(2x - 5)^2 - 80 = 0$.

677. $(4x - 3)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

678. $(3x - 5)^2 - (4x - 1)^2 = 0$.

679. $(2x + 1)^2 - 9(x - 2)^2 = 0$

680. $4x^2 - 9 + 5(2x + 3) = 0$.

— **Résoudre les équations suivantes :**

681. $x^2 - 16x + 39 = 0$

682. $x^2 - 13x - 48 = 0.$

683. $3x^2 + 8x + 4 = 0$

684. $2x^2 - 11x + 12 = 0.$

685. $5x^2 - 29x + 20 = 0$

686. $3x^2 + 23x + 14 = 0.$

687. $7x^2 - 33x - 10 = 0$

688. $4x^2 + 21x - 18 = 0.$

689. $10x^2 - 49x + 51 = 0$

690. $6x^2 - 17x - 45 = 0.$

— **Résoudre les équations suivantes :**

691. $(x - 2)(2x - 1) + 2(x - 3) = 4(x - 2)^2.$

692. $(2x + 3)(x - 4) - (x - 5)(x - 2) = (3x - 5)(x - 4).$

693. $(4x - 7)(x - 5) + (x - 3)^2 = (x + 2)^2.$

694. $(8x - 3)(3x + 2) - (4x + 7)(x + 4) = (2x + 1)(5x - 1).$

695. $(9x - 1)(x + 3) - (4x + 1)(x + 1) = (5x - 4)(3x - 2).$

— **Résoudre les équations suivantes :**

696. $\dfrac{(3x + 1)(x - 1)}{2} - \dfrac{(x - 3)(x + 5)}{3} = \dfrac{(4x - 1)(x + 3)}{6}.$

697. $\dfrac{(2x - 3)(x - 2)}{7} + \dfrac{(x + 1)^2}{4} = \dfrac{(x + 7)(x - 3)}{2}.$

698. $\dfrac{(x + 1)(x + 2)}{4} - \dfrac{(x - 1)(x - 2)}{3} = \dfrac{x^2 - 9}{5}.$

699. $\dfrac{(x - 1)(x + 2)}{3} - \dfrac{x^2 + 3}{7} = \dfrac{(3x + 1)(2x - 3)}{21}.$

700. $\dfrac{x^2 + 1}{3} - \dfrac{(x + 2)(x - 3)}{2} = \dfrac{(x + 5)(x - 4)}{6}.$

— **Résoudre les équations suivantes :**

701. $\dfrac{4}{x - 1} - \dfrac{3}{x - 2} = -1$

702. $\dfrac{7}{x - 4} - \dfrac{6}{x - 2} = 2.$

703. $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x + 4} = \dfrac{1}{x}$

704. $\dfrac{1}{x - 8} + \dfrac{1}{x - 18} = \dfrac{1}{x}.$

705. $\dfrac{x - 4}{x - 2} + \dfrac{x - 2}{x - 3} = \dfrac{11}{6}$

706. $\dfrac{2x + 1}{x - 1} - \dfrac{3(x - 1)}{x + 1} = 2.$

707. $\dfrac{x + 4}{2x - 3} + \dfrac{2x - 3}{x + 4} = 2$

708. $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x - 9} = \dfrac{1}{x}.$

709. $\dfrac{2x + 5}{2x} - \dfrac{x}{x + 5} = 1$

710. $\dfrac{x - 3}{5} + \dfrac{5}{x - 3} = \dfrac{89}{40}.$

711. $\dfrac{5}{x + 8} - \dfrac{2}{2x + 1} = \dfrac{7}{9x}$

712. $\dfrac{12}{2x - 5} - \dfrac{5}{x - 3} = \dfrac{1}{3(x + 1)}.$

— **Résoudre les équations paramétriques suivantes :**

713. $x^2 - (m + 1)x + m = 0$

714. $x^2 - (2m + 1)x + 2m = 0$

715. $x^2 - (a + b)x + ab = 0$

716. $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0.$

717. $x^2 + (3a - 2b)x - 6ab = 0$

718. $3x^2 - 2(3a - 1)x - 4a = 0.$

719. $\frac{2x + m}{x} - \frac{2x}{x + m} = 2$

720. $\frac{x}{x - m} + \frac{x - m}{4x} = 1.$

721. $\frac{1}{x + a} + \frac{1}{x + b} = \frac{1}{x}$

722. $\frac{3}{x + 2a} + \frac{1}{a} = \frac{4}{x + a}.$

723. Quelle valeur faut-il donner à m pour que l'équation :

$$(m + 3)x^2 + 2(3m + 1)x + (m + 3) = 0$$

ait une racine double? Calculer la valeur de cette racine double.

724. Même exercice pour : $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = 0.$

725. Même exercice pour : $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 = 0.$

726. Soit l'équation : $2x^2 - (m + 4)x + m = 0.$

1° Calculer m pour que l'une des racines soit égale à 3.

2° Calculer alors l'autre racine.

727. Quelles valeurs faut-il donner à m pour que l'équation

$$(4m + 1)x^2 - 4mx + m - 3 = 0$$

ait des racines.

728. Même exercice pour : $(m - 3)x^2 - 2(3m + 1)x + 9m - 2 = 0.$

729. Même exercice pour : $(3m - 7)x^2 + (6m - 1)x - (5 - 3m) = 0.$

VINGT-CINQUIÈME LEÇON

* RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS ET LES RACINES

276. Somme et produit des racines. — *Lorsque l'équation du second degré* $ax^2 + bx + c = 0$ *a des racines distinctes ou confondues, leur somme est égale à* $-\frac{b}{a}$ *et leur produit à* $\frac{c}{a}$.

Lorsqu'elles existent, ces racines sont données par les formules :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La somme : $x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4cc}}{2a} = \frac{-2b}{2a}.$

Donc :

$$\boxed{x' + x'' = -\frac{b}{a}.} \qquad (1)$$

Le produit : $x'x'' = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2}.$

Le numérateur est le produit de la somme des deux nombres $-b$ et $\sqrt{b^2 - 4ac}$ par leur différence. Il est donc (n° 101) égal à la différence de leurs carrés :

$$x'x'' = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}.$$

Soit

$$\boxed{x'x'' = \frac{c}{a}.} \qquad (2)$$

Le calcul est valable si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. On vérifie d'ailleurs que pour

$$x' = x'' = \frac{b}{2a} \quad \text{on a} \quad x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

et $$x'x'' = \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \quad \text{car } b^2 = 4ac.$$

277. Réciproque. — ***Si deux nombres x' et x'' ont pour somme $-\frac{b}{a}$ et pour produit $\frac{c}{a}$ ces nombres sont les racines de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$.***

En effet les nombres 5 et 7 par exemple sont visiblement racines de l'équation du second degré $(x - 5)(x - 7) = 0$. De même x' et x'' sont racines de l'équation du second degré en x.

$$(x - x')(x - x'') = 0.$$

Soit $$x^2 - xx' - xx'' + x'x'' = 0$$

ou $$x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0.$$

Par hypothèse $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ et $x'x'' = \frac{c}{a}$.

L'équation devient $$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ou $$ax^2 + bx + c = 0.$$

On peut donc énoncer le théorème final :

La condition nécessaire et suffisante pour que x' et x'' soient les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est que l'on ait :

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x'x'' = \frac{c}{a}.$$

Pratiquement, pour vérifier que deux nombres donnés sont les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ il suffit de vérifier que leur somme S est égale à $-\frac{b}{a}$ et leur produit P est égal à $\frac{c}{a}$. Si on connait déjà une des racines x', la seconde x'' sera donnée par l'une des relations

$$x'' = -\frac{b}{a} - x' \quad \text{ou} \quad x'' = \frac{c}{ax'}$$

Exemples. — 1° $x^2 - 8x + 15 = 0$.

La somme des racines est 8 et leur produit 15. On voit facilement que les nombres 3 et 5 satisfont à ces conditions. Donc : $x' = 3$ et $x'' = 5$.

2° $3x^2 - 14x + 11 = 0$.

On voit que $a + b + c = 0$. L'équation est vérifiée pour $x = 1$. On a donc :

$$x' = 1 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{c}{a} = \frac{11}{3}.$$

3° $21x^2 + 17x - 4 = 0$.

On voit que $a - b + c = 0$. L'équation est vérifiée pour $x = -1$. On a donc

$$x' = -1 \quad \text{et} \quad x'' = -\frac{c}{a} = \frac{4}{21}.$$

278. Recherche de deux nombres dont on connaît la somme et le produit.

Posons $-\frac{b}{a} = S$ et $\frac{c}{a} = P$. l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ s'écrit :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Soit

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

D'après ce qui précède, si cette équation a des racines, leur somme est S et leur produit P. Et réciproquement :

Lorsque deux nombres x et y ont pour somme S et pour produit P, ces nombres sont les racines de l'équation en X :

$$\boxed{X^2 - SX + P = 0.}$$

Si S et P, sont donnés à priori x et y n'existent que si $\Delta \geqslant 0$ soit :

$$\boxed{S^2 - 4P \geqslant 0.}$$

1° $S^2 - 4P > 0$ $\quad$ x et y ont pour valeurs : $\frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$.

2° $S^2 - 4P = 0$ $\quad$ x et y sont égaux à $\frac{S}{2}$.

3° $S^2 - 4P < 0$ $\quad$ Le problème est impossible.

Exemples : 1° $S = +3$ et $P = -70$.

L'équation $X^2 - 3X - 70 = 0$ a pour racines 10 et -7.

On peut prendre $x = 10$ et $y = -7$ ou $x = -7$ et $y = 10$.

2° $S = 12$ et $P = 36$.

$S^2 - 4P = 144 - 144 = 0$. On a donc $x = y = \frac{S}{2} = 6$.

279. Conséquences de la condition : $S^2 - 4P \geqslant 0$.

Supposons S fixe et P variable, la condition précédente qui s'écrit $P \leqslant \frac{S^2}{4}$ montre que la plus grande valeur possible pour P est $\frac{S^2}{4}$.

On a alors : $\Delta = S^2 - 4P = 0$ et $x = y = \frac{S}{2}$ et réciproquement. Donc :

Lorsque deux nombres variables ont une somme constante, leur produit est maximum quand ces deux nombres sont égaux.

Supposons P fixe et S variable, x et y étant positifs. La condition $S^2 \geqslant 4P$ ou $S \geqslant 2\sqrt{P}$ montre que la plus petite valeur possible pour S est $2\sqrt{P}$, ce qui a lieu quand $\Delta = 0$. Donc :

Lorsque deux nombres positifs variables ont un produit constant, leur somme est minimum quand ces deux nombres sont égaux.

280. Fonctions symétriques des racines. — ***On appelle fonction symétrique des racines x' et x'' de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ toute expression formée au moyen de x' et de x'' qui ne change pas quand on permute ces deux lettres.***

EXEMPLES : $x'^2 + x''^2$; $x'^3 + x''^3$; $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$; $(x' - 1)(x'' - 1)$, etc...

On démontre qu'une telle expression peut s'exprimer en fonction de $S = x' + x''$ et $P = x'x''$.

1° $x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = S^2 - 2P$.

2° $x'^3 + x''^3 = (x' + x'')^3 - 3x'x''(x' + x'') = S^3 - 3PS$.

3° $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{x' + x''}{x'x''} = \frac{S}{P}$.

Pour calculer une telle expression, il suffit donc, après l'avoir exprimée en fonction de P et de S, de remplacer P et S par leurs valeurs. On évite ainsi des calculs sur des expressions irrationnelles.

281. Application. — *Déterminer m de façon que l'équation :*

$$x^2 + mx + m + 7 = 0 \tag{1}$$

ait deux racines vérifiant la relation symétrique :

$$x'^2 + x''^2 = 10. \tag{2}$$

La relation s'écrit : $(x' + x'')^2 - 2x'x'' = 10$. Soit :

$$m^2 - 2(m + 7) = 10 \quad \text{ou} \quad m^2 - 2m - 24 = 0.$$

Ce qui donne pour m les valeurs -4 et $+6$.

Pour $m = -4$ l'équation (1) devient $x^2 - 4x + 3 = 0$ dont les racines $x' = 1$ et $x'' = 3$ vérifient la relation (2).

Pour $m = 6$ l'équation (1) devient $x^2 + 6x + 13 = 0$ qui n'a pas de racines. Seule la valeur $m = -4$ est solution du problème.

EXERCICES

— Résoudre mentalement les équations :

730. $x^2 - 5x + 6 = 0$

731. $x^2 - 13x + 42 = 0$.

732. $x^2 + 8x + 15 = 0$

733. $x^2 + 18x + 77 = 0$.

734. $x^2 - 8x - 33 = 0$

735. $x^2 + 5x - 24 = 0$.

736. $x^2 - (a + b)x + ab = 0$

737. $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$.

— Trouver *a priori*, une racine des équations suivantes et calculer l'autre

738. $3x^2 - 11x + 8 = 0$

739. $5x^2 + 24x + 19 = 0$.

740. $5x^2 + 61x - 66 = 0$

741. $7x^2 - 43x - 50 = 0$,

742. $(b - c)x^2 + (c - a)x + a - b = 0$.

743. $a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$.

744. $(x + a)(x + b) = (m + a)(m + b)$.

745. $(b - c)x^2 + (c - a)mx + (a - b)m^2 = 0$.

746. $\frac{x}{a} + \frac{b}{x} = \frac{m}{a} + \frac{b}{m}$

747. $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

— Calculer la seconde racine des équations suivantes :

748. $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x' = 4$.

749. $7x^2 + 23x + 6 = 0$ — $x' = -3$.

750. $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ — $x' = -2$.

751. $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ — $x' = m$.

— Calculer deux nombres connaissant leur somme S et leur produit P :

752. S = 126 ; P = 3.569

753. S = — 30 ; P = 221.

754. S = 169 ; P = 6.328

755. S = 38 ; P = — 1.239.

756. S = — 117; P = — 2.430

757. S = 57 ; P = — 994.

758. S = — 68 ; P = — 3.744

759. S = — 152: P = 5.695.

— **Former l'équation du second degré admettant pour racines :**

760. 9 et 13

761. — 11 et 17.

762. $m + 3$ et $\frac{2m - 5}{2}$

763 $\frac{m + 1}{m}$ et $\frac{m - 2}{m}$.

764. $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$

765. $m + \sqrt{m^2 - 3}$ et $m - \sqrt{m^2 - 3}$.

— Calculer en fonction des coefficients a, b et c de l'équation $ax + bx^2 + c = 0$ les expressions suivantes :

766. $\frac{1}{x'^2} + \frac{1}{x''^2}$

767. $\frac{1}{x'^3} + \frac{1}{x''^3}$

768. $(x' - 3)^2 + (x'' - 3)^2$

769. $(2x' - 3x'')(2x'' - 3x')$.

770. $\frac{1}{x'^2 - 2} + \frac{1}{x''^2 - 2}$

771. $\frac{x' + 3}{x'' + 1} + \frac{x'' + 3}{x' + 1}$.

VINGT-SIXIÈME LEÇON

* SIGNE DES RACINES

282. Exemples.

1° *Soit l'équation* : $3x^2 - 4x - 7 = 0$.

a et c sont de signes contraires, l'équation a donc deux racines (n° 273). Leur produit $-\frac{7}{3}$ est négatif. Nous pouvons en conclure sans résoudre l'équation que les deux racines x' et x'' sont de signes contraires.

2° *Soit l'équation* : $x^2 - 7x + 11 = 0$.

$\Delta = 49 - 44 = 5$. L'équation a donc deux racines. Leur produit $+11$ est positif, ces racines sont donc de même signe. Leur somme $+7$ étant positive, elles sont toutes deux positives.

3° *Soit l'équation* : $4x^2 + 5x + 1 = 0$.

$\Delta = 25 - 16 = 9$. L'équation a deux racines. Leur produit $+\frac{1}{4}$ est positif, ces racines sont donc de même signe. Leur somme $-\frac{5}{4}$ étant négative, elles sont toutes deux négatives.

283. Cas général. — Il est toujours possible de déterminer le signe des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sans calculer ces racines.

1er Cas : $\frac{c}{a} < 0$. a et c sont de signes contraires (n° 273), l'équation a donc deux racines dont le produit est négatif. Ces racines sont donc de signes contraires. L'une est positive et l'autre est négative.

2° Cas : $c = 0$. Une des racines est nulle (n° 268). L'autre est égale à la somme $-\frac{b}{a}$ dont on a immédiatement le signe.

3° Cas : $\frac{c}{a} > 0$. Les racines n'existent que si $\Delta \geqslant 0$. Leur produit est alors positif et elles sont de même signe. Le signe commun est celui de leur somme $-\frac{b}{a}$.

En définitive :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

1° $\frac{c}{a} < 0$	$x' < 0 < x''$
2° $c = 0$	$x' = 0$ et $x'' = -\frac{b}{a}$
3° $\frac{c}{a} > 0$ et $\Delta \geqslant 0$. $\left\{ -\frac{b}{a} > 0 \right.$	$0 < x' < x''$
$\left. -\frac{b}{a} < 0 \right.$	$x' < x'' < 0$.

Remarques. — 1° Le théorème du n° 273 peut ainsi être complété :

Lorsque** a **et** c **sont de signes contraires l'équation** $ax^2 + bx + c = 0$ **a deux racines de signes contraires.

2° La méthode précédente est surtout applicable aux équations à coefficients numériques. Quand ces coefficients dépendent d'un paramètre, on détermine le nombre et le signe des racines, pour les différentes valeurs du paramètre, en opérant comme au paragraphe suivant.

284. Discussion d'une équation paramétrique.

Exemple. — *Étudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation :*

$$(m - 2)x^2 - 2mx + m + 1 = 0.$$

Nous avons : $a = m - 2$, $b = -2m$ ou $b' = -m$ et $c = m + 1$.

Notons d'abord que $a = 0$ pour $m = 2$. L'équation est du premier degré et se réduit à : $-4x + 3 = 0$ d'où $x = \frac{3}{4}$.

Pour les autres valeurs de m l'équation proposée est du second degré.

Étudions le signe du discriminant Δ, celui du produit des racines $P = \frac{c}{a}$ et celui de leur somme $S = -\frac{b}{a}$.

1° $\Delta' = b'^2 - ac = m^2 - (m-2)(m+1) = m + 2$.

Δ' est nul pour $m = -2$, positif pour $m > -2$ et négatif pour $m < -2$.

2° $P = \frac{c}{a} = \frac{m+1}{m-2}$. On obtient (n° 163).

m	$-\infty$		-1		$+2$		$+\infty$
$m+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$m-2$		$-$		$-$	0	$+$	
P		$+$	0	$-$	‖	$+$	

3° $S = -\frac{b}{a} = \frac{2m}{m-2}$. On obtient de même

m	$-\infty$		0		$+2$		$+\infty$
$2m$		$-$	0	$+$		$+$	
$m-2$		$-$	0	$-$		$+$	
S		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Les valeurs remarquables de m sont donc : -2; -1: 0 et $+2$.

Pour $m < -2$, le discriminant Δ est négatif : Pas de racines.

Pour $-2 < m < -1$ et pour $m > +2$, Δ, P et S sont positifs. L'équation a deux racines distinctes, de même signe, toutes deux positives.

Pour $-1 < m < +2$, Δ est positif et P négatif. L'équation a deux racines de signes contraires.

D'au're part pour $m = -2$, Δ est nul. L'équation a donc une racine double égale à $\frac{S}{2}$ soit $\frac{1}{2}$.

Pour $m = -1$, P est nul. On a donc (n° 269) : $x' = 0$ et $x'' = S = \frac{2}{3}$.

Pour $m = 0$, S est nul; les deux racines de signes contraires sont opposées. Comme $P = -\frac{1}{2}$, on en déduit que $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On peut donc établir le tableau de discussion suivant. (Les valeurs de m ont été disposées verticalement afin de pouvoir écrire plus facilement les conclusions).

m	Δ'	P	S	Conclusions
$+\infty$				
	$+$	$+$	$+$	Deux racines positives
$+2$				—— Eq. du 1ᵉʳ degré : $x = \frac{3}{4}$.
	$+$	$-$	$-$	Deux racines de signes contraires
0	……	$-\frac{1}{2}$	0	—— **Deux racines opposées** : $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
	$+$	$-$	$+$	Deux racines de signes contraires
-1	……	0	$\frac{2}{3}$	—— $x' = 0,\ x'' = \frac{2}{3}$.
	$+$	$+$	$+$	Deux racines positives
-2	0	$\frac{1}{4}$	1	—— Une racine double : $x = \frac{1}{2}$.
	$-$	$+$	$+$	Pas de racine.
$-\infty$				

REMARQUE. — On peut vérifier que Δ et P ne sont jamais négatifs en même temps et que quand S s'annule Δ et P sont de signes contraires. Cela est général et résulte de la relation $\Delta = S^2 - 4P$ ou $\Delta + 4P = S^2$ que l'on obtient quand on écrit l'équation sous la forme $x^2 - Sx + P = 0$.

EXERCICES

— **Étudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines des équations :**

772. $x^2 - 7x + 3m = 0$ **773.** $x^2 - 2(m + 1)x + 1 = 0$.

774. $mx^2 - (2m - 3)x + m = 0$ **775.** $mx^2 - 2(m + 2) + m + 3 = 0$.

776. $(2m + 1)x^2 - 2x + m + 1 = 0$ **777.** $mx^2 - 2(m - 1)x + m + 5 = 0$.

778. On considère l'équation : $mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$.

1° Étudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe de ses racines;

2° Déterminer m pour que l'on ait $x' = 3$ et calculer x'';

3° Pour quelles valeurs de m a-t-on : $4(x' + x'') = 7x'x''$.

779. Déterminer m de façon que l'équation

$$mx^2 + (m - 4)x + 2m = 0$$

ait deux racines satisfaisant à la relation : $2(x'^2 + x''^2) = 5x'x''$.

— Reprendre le même exercice pour

780. $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 2 = 0$ et $(3x' - 5)(3x'' - 5) = 4$.

781. $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$ et $\dfrac{1}{x'^2} + \dfrac{1}{x''^2} = \dfrac{5}{4}$.

782. 1° Étudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation : $(m + 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 3 = 0$.

2° Déterminer m pour que l'on ait : $(4x' + 1)(4x'' + 1) = 18$.

3° Calculer l'expression $(x' + 2)(x'' + 2)$. En déduire que les racines vérifient lorsqu'elles existent, une relation indépendante de m. Peut-on utiliser cette relation pour déterminer x'' lorsque $x' = 4$.

VINGT-SEPTIÈME LEÇON

* ÉQUATIONS ET SYSTÈMES SE RAMENANT AU SECOND DEGRÉ

285. Équations de la forme A.B.C. = 0.

Les racines de cette équation sont (n° 141) celles des équations :

$$A = 0, \quad B = 0 \quad \text{et} \quad C = 0.$$

EXEMPLE : $(2x^2 - 5x + 1)^2 - (x^2 - 5x + 6)^2 = 0.$

Cette équation s'écrit :

$(2x^2 - 5x + 1 + x^2 - 5x + 6)(2x^2 - 5x + 1 - x^2 + 5x - 6) = 0.$

soit $\qquad (3x^2 - 10x + 7)(x^2 - 5) = 0.$

Le premier facteur donne les racines 1 et $\frac{7}{3}$ et le second $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

286. Équations bicarrées : $ax^4 + bx^2 + c = 0.$ (1)

Pour résoudre une telle équation, on pose $x^2 = y$, on obtient l'*équation résolvante* $\qquad ay^2 + by + c = 0.$ (2)

EXEMPLE : $3x^4 - 22x^2 - 45 = 0.$

On obtient $\qquad 3y^2 - 22y - 45 = 0$

qui a pour racines $y = 9$ et $y = -\frac{5}{3}$ · Il faut donc prendre :

1° $x^2 = 9$. Soit $x = -3$ ou $x = +3$.

2° $x^2 = -\frac{3}{5}$ ce qui est impossible.

— En définitive, *on voit qu'à toute racine positive de l'équation résolvante* (2) *correspondent deux racines opposées de l'équation bicarrée* (1).

287. Équations irrationnelles. — Rappelons que lorsqu'on élève au carré les deux membres d'une équation, on peut introduire des solutions

étrangères (nº 147). Il faut donc vérifier que les racines de l'équation ainsi obtenue satisfont à l'équation initiale. Toutefois, on a vu que les racines de l'équation $A = \sqrt{B}$ sont celles de l'équation $A^2 = B$ pour lesquelles on a : $A \geqslant 0$.

EXEMPLE I : $x - 4 = \sqrt{2x + 7}$. (1)

Élevons au carré : $$x^2 - 8x + 16 = 2x + 7$$
ou $$x^2 - 10x + 9 = 0.$$

Cette équation admet pour racines 1 et 9. Comme il faut que l'on ait $x - 4 > 0$, seule convient la racine : $x = 9$.

EXEMPLE II : $\sqrt{2x + 1} = 2 + \sqrt{x - 3}$.

On obtient : $$2x + 1 = 4 + 4\sqrt{x - 3} + x - 3.$$
ou $$x = 4\sqrt{x - 3}.$$
soit $x^2 = 16(x - 3)$ ou $x^2 - 16x + 48 = 0$.

Cette équation admet pour racines $x = 4$ et $x = 12$, qui vérifient toutes deux l'équation proposée :

$$\sqrt{9} = 2 + \sqrt{1} \quad \text{et} \quad \sqrt{25} = 2 + \sqrt{9}.$$

288. Systèmes se ramenant à une équation du second degré.

EXEMPLE. — *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} x - y = 3 & (1) \\ x^2 - 3y^2 = 13. & (2) \end{cases}$$

Éliminons une des inconnues. L'équation (1) est linéaire, et donne :

$$y = x - 3. \quad (3)$$

Portons cette valeur dans l'équation (2)

$$x^2 - 3(x - 3)^2 = 13$$

soit $-2x^2 + 18x - 40 = 0$ ou $x^2 - 9x + 20 = 0$.

Cette équation a pour racines : $x' = 4$ et $x'' = 5$. D'après la relation (3) :

Pour $x' = 4$ on obtient $y' = 1$ et pour $x'' = 5$, $y'' = 2$.

On vérifie facilement que le système admet les deux solutions :

1º $x = 4$; $y = 1$ 2º $x = 5$; $y = 2$.

289. Problème. — *Déterminer* m *de façon que l'équation*

$$x^2 - (m + 5)x - m + 6 = 0 \quad (1)$$

ait deux racines vérifiant la relation : $2x' + 3x'' = 13$. (2)

Le problème est analogue à celui du nº 281, mais ici la relation imposée aux racines n'est pas symétrique. Il serait maladroit de calculer x' et x'' et de porter les valeurs trouvées dans la relation (2) car cela conduirait à une équation irrationnelle. Il est préférable d'adjoindre à la relation (2), les deux

relations donnant x' et x''. On obtient ainsi le système de trois équations à trois inconnues, x', x'' et m.

$$\begin{cases} 2x' + 3x'' = 13 & (2) \\ x' + x'' = m + 5 & (3) \\ x'x'' = -m + 6. & (4) \end{cases}$$

Les deux premières sont linéaires en x' et x'' et donnent :

$$x' = 3m + 2 \quad \text{et} \quad x'' = 3 - 2m. \qquad (5)$$

Portons ces valeurs dans la troisième

$$(3m + 2)(3 - 2m) = -m + 6$$

soit
$$-6m^2 + 6m = 0$$

ou
$$-6m(m - 1) = 0.$$

Cette équation admet deux racines : $m = 0$ et $m = 1$.

D'après les relations (5) on obtient :

1° Pour $m = 0$: $x' = 2$ et $x'' = 3$

2° Pour $m = 1$: $x' = 5$ et $x'' = 1$.

On vérifie que ces valeurs satisfont à l'équation (1) et à la relation (2).

290. Systèmes symétriques. — Lorsque les équations d'un système sont symétriques par rapport à deux inconnues x et y, il est préférable, même si on peut opérer autrement, de commencer par calculer la somme et le produit de ces deux inconnues.

EXEMPLE I. — *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} x + y = 13 & (1) \\ x^2 + y^2 = 89. & (2) \end{cases}$$

L'équation (2) s'écrit : $(x + y)^2 - 2xy = 89$

et compte tenu de (1) $169 - 2xy = 89.$

Donc $xy = 40.$

Par suite (n° 278) x et y qui ont pour somme 13 et pour produit 40, sont les racines de l'équation en X :

$$X^2 - 13X + 40 = 0.$$

Cette équation a pour racines 5 et 8. On obtient les deux solutions :

1° $x = 5$; $y = 8$ 2° $x = 8$; $y = 5$.

EXEMPLE II. — *Résoudre le système :*

$$\text{I}\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ (x - 1)(y - 1) = 18. \end{cases}$$

L'élimination de y par exemple conduit à une équation du 4e degré en x.

Posons $S = x + y$ et $P = xy$. Le système (I) devient :

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{l} S^2 - 2P = 65 \\ P - S = 17. \end{array} \right.$$

Éliminons P. On obtient : $S^2 - 2S - 99 = 0$

ce qui donne pour S les deux valeurs 11 et -9.

1° Pour $S = 11$, on obtient : $P = S + 17 = 28$.

x et y sont les racines de l'équation : $X^2 - 11X + 28 = 0$

ces racines sont $+7$ et $+4$. D'où les deux solutions :

$$x = 7;\ y = 4 \quad \text{et} \quad x = 4;\ y = 7.$$

2° Pour $S = -9$ on obtient : $P = S + 17 = 8$.

L'équation : $X^2 + 9X + 8 = 0$

a pour racines -1 et -8, ce qui donne deux nouvelles solutions :

$$x = -1;\ y = -8 \quad \text{et} \quad x = -8;\ y = -1.$$

291. Remarque. — On peut parfois, en faisant un changement de variables, ramener un système donné à un système symétrique. Ainsi en posant $z = -y$ le système

$$\left\{ \begin{array}{r} x - y = 4 \\ xy = 45 \end{array} \right. \quad \text{s'écrit} \quad \left\{ \begin{array}{r} x + z = 4 \\ xz = -45. \end{array} \right.$$

292. Intersection de deux courbes. — Les coordonnées de tout point commun à deux courbes tracées sur un même graphique vérifient les équations de chacune de ces deux courbes. Elles constituent par suite, une solution du système formé par ces deux équations et réciproquement à toute solution de ce système correspond un point commun aux deux courbes.

Fig. 61

Exemple I. — *Calculer les coordonnées des points d'intersection de la droite* $y = \frac{x}{2} + 3$ *et de la parabole*

$$y = \frac{x^2}{2} \text{ (fig. 61).}$$

En éliminant y entre les équations des deux courbes on obtient l'équation aux abscisses des points d'intersection :

$$\frac{x^2}{2} = \frac{x}{2} + 3.$$

Soit : $$x^2 - x - 6 = 0$$

Cette équation admet pour racines : -2 et $+3$.

On obtient alors :

Pour $x = -2$, $y = +2$
Pour $x = +3$, $y = +4{,}5$.

Il y a donc deux points d'intersection :

A (-2; $+2$) et B ($+3$; $+4{,}5$).

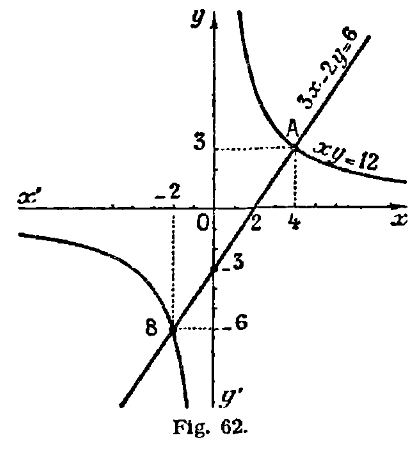


Fig. 62.

Exemple II. — *Trouver les coordonnées des points d'intersection de la droite*

$$3x - 2y = 6$$

et de l'hyperbole $xy = 12$ (fig. 62).

Éliminons y, nous obtenons l'équation :

$$3x^2 - 24 = 6x$$

ou $$x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Cette équation a pour racines $+4$ et -2.

Pour $x = 4$, on a : $y = 3$ et pour $x = -2$, on a : $y = -6$. La droite rencontre donc l'hyperbole en deux points : A(4; 3) : et B(-2; -6).

— Remarquons que réciproquement, dans les exemples précédents, la mesure des coordonnées des points A et B permet de résoudre graphiquement le système formé par les équations des deux courbes.

EXERCICES

Résoudre les équations :

783. $(3x + 2)(4x^2 - 5)(9x^2 - 12) = 0$.

784. $(x^2 - 5x + 4)(2x^2 - 7x + 3) = 0$.

785. $(3x^2 + 2x + 4)^2 - x^2(x + 8)^2 = 0$.

786. $(x^3 + 3x^2 - 1)^2 - (x^3 - 2x + 1)^2 = 0$.

787. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

788. $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

789. $25x^4 - 29x^2 + 4 = 0$

790. $16x^4 + 7x^2 - 9 = 0$.

791. $x^4 - (m^2 + 4)x^2 + 4m^2 = 0$

792. $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0$.

793. $\sqrt{x^2 + 25} - 13 = 0$

794. $\sqrt{2x + 7} - \sqrt{x} = 2$.

795. $x - \sqrt{4x - 3} = 0$

796. $\sqrt{3x + 4} - \sqrt{x - 3} = 3$

797. $x - \sqrt{x + 1} = 1$

798. $\sqrt{10x - 1} - \sqrt{5x - 1} = 5$.

— Résoudre les systèmes suivants :

799. $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x^2 - xy = 24 \end{cases}$

800 $\begin{cases} 4x - 3y = 15 \\ (x - 4)(y - 3) = 20. \end{cases}$

801. $\begin{cases} 4x + 3y = 84 \\ (x - y)^2 = 49 \end{cases}$

802 $\begin{cases} 5x - 4y = 45 \\ (x + y)^2 = 324. \end{cases}$

803. $\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 58 \end{cases}$

804. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = 61. \end{cases}$

805. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^4 + y^4 = 97 \end{cases}$

806 $\begin{cases} xy = 45 \\ x^2 + y^2 = 106. \end{cases}$

807. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 130 \\ xy - (x + y) = 47 \end{cases}$

808 $\begin{cases} xy = 30 \\ x^2 + y^2 - 2(x + y) = 83. \end{cases}$

809. $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ x + y - z = -1 \\ xy + 5z = 4 \end{cases}$

810. $\begin{cases} x + 4y = 7 \\ x + 3y - 4z = 1 \\ xy + 4z^2 = 2. \end{cases}$

— Déterminer m de façon que les équations suivantes aient des racines satisfaisant à la relation correspondante :

811. $x^2 - 5x + m = 0$ Relation donnée : $3x' - 2x'' = 0.$

812. $x^2 - 3mx + m + 1 = 0$ $x' - 2x'' = 0.$

813. $mx^2 - 2(m - 1)x + m = 0$ $x' + 2x'' = 3.$

814. $(m - 1)x^2 - 2mx - 3m + 1 = 0$ $2x' + 3x'' = 5.$

815. $x^2 - 2mx + 5m - 3 = 0$ $x' - 2x'' = 3.$

816. $mx^2 - (2m + 1)x + m + 1 = 0$ $5x' - 3x'' = 1.$

817. Soit l'équation : $x^2 - 2(m^2 + 1)x + (3m - 1)^2 = 0.$

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles cette équation admet une racine double et calculer les valeurs de x correspondantes.

818. Étudier suivant les valeurs de m l'existence et le nombre des racines de l'équation :

$$x^4 - 2(m - 2)x^2 + m(m - 3) = 0.$$

819. Soit l'équation : $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2 = 0.$

1° Étudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines.

2° Déterminer m pour que l'une des racines soit le triple de l'autre. Montrer que les racines vérifient alors la relation : $3(x' + x'')^2 = 16x'x''$. La réciproque est-elle exacte ?

820. 1° Étudier l'existence et le signe des racines de l'équation :

$$mx^2 - 2(m + 1)x + m - 4 = 0.$$

2° Déterminer m de façon que l'on ait : $x' + 4x'' = 3$.

3° Calculer l'expression $(x' + 2)(x'' + 2)$. En déduire une relation entre x' et x'' indépendante de m. Comment peut-on utiliser cette relation pour retrouver les valeurs de x' et de x'' puis celles de m déterminées au 2°.

— Construire sur un même graphique les courbes représentées par les équations suivantes et déterminer les coordonnées des points d'intersection.

821. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$

822. $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 5x + 7. \end{cases}$

823. $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} \\ x - 2y + 6 = 0 \end{cases}$

824. $\begin{cases} y = -2x^2 \\ 3x + y = -2. \end{cases}$

825. $\begin{cases} xy = 10 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

826. $\begin{cases} xy = 12 \\ 3x - 2y = 6. \end{cases}$

827. $\begin{cases} xy = 6 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

828. $\begin{cases} xy = -4 \\ 3x - 2y = 11. \end{cases}$

829. On considère la courbe $y = \dfrac{2}{x}$ et la droite variable $y = -2x + m$.

1° A quelles conditions la droite est-elle sécante, tangente ou extérieure à la courbe.

2° On désigne par A et B, les deux points d'intersection quand ils existent et par M le milieu de AB. Calculer les coordonnées de M et en déduire le lieu de M lorsque m varie.

830. 1° Montrer que la droite $y = mx + 1$ coupe la courbe $y = \dfrac{x^2}{4}$ en deux points A et B d'abscisses x' et x''. Calculer x' et x'' pour $m = 3/4$.

2° On prend sur AB le point M d'abscisse x telle que : $\dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''}$.

Calculer les coordonnées de M en fonction de m et en déduire le lieu du point M, lorsque m varie.

VINGT-HUITIÈME LEÇON

* TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

293. Définitions. — ***On appelle trinôme du second degré en x tout polynôme $f(x)$ de la forme :***

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Les coefficients b et c peuvent être nuls, mais le coefficient a doit être différent de zéro sinon le polynôme serait du 1er degré :

EXEMPLES : $f(x) = 2x^2 - 7x + 5$; $f(x) = 3x^2 - 4$; $f(x) = 5x^2 + 3x$.

La valeur numérique d'un trinôme est fonction de la valeur de la variable x et peut être positive, nulle ou négative :

On appelle racine d'un trinôme toute valeur de x pour laquelle ce trinôme est nul.

Cette valeur est donc racine de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$.

De même l'expression $\Delta = b^2 - 4ac$ se nomme le ***discriminant du rinôme.***

— Nous avons vu (12e leçon) comment on détermine *a priori* le signe d'un binôme du premier degré $f(x) = ax + b$ connaissant sa racine et le signe de a. Nous allons établir une règle analogue pour un trinôme du second degré.

294. Formes remarquables du trinôme. — Considérons le trinôme

$$y = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

1° Cas général. Nous pouvons écrire comme au n° 271 :

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

Soit

$$\boxed{y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]} \qquad (1)$$

formule valable dans tous les cas.

2° **Cas où** $\Delta = 0$. La formule précédente se simplifie et devient puisque $b^2 - 4ac = 0$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Le trinôme admet alors une racine double $x' = -\frac{b}{2a}$ et on a :

$$\boxed{y = a(x - x')^2} \qquad (2)$$

3° **Cas où** $\Delta > 0$. On peut alors écrire puisque $b^2 - 4ac > 0$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right].$$

Soit : $$y = a\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

Le trinôme admet dans ce cas deux racines distinctes :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

et nous obtenons :

$$\boxed{y = a(x - x')(x - x'')} \qquad (3)$$

295. Décomposition d'un trinôme. — Les formules (2) et (3) permettent de décomposer en un produit de facteurs du premier degré (distincts ou non), tout trinôme qui admet des racines distinctes ou confondues. Inversement, lorsqu'un trinôme est décomposé en produit de deux facteurs du premier degré, il admet pour racines celles de chacun de ces facteurs. Nous en concluons :

Pour qu'un trinôme du second degré puisse se décomposer en un produit de facteurs du premier degré, il faut et il suffit qu'il ait des racines distinctes ou confondues.

(On pourra d'autre part remarquer que les formules (2) et (3) sont des conséquences du n° 118).

APPLICATION. — *Simplifier la fraction* : $A = \frac{3x^2 - 7x + 4}{2x^2 + 3x - 5}$.

Les deux termes de la fraction admettent tous deux la racine $x = 1$. On obtient facilement :

$$A = \frac{(3x - 4)(x - 1)}{(2x + 5)(x - 1)} \quad \text{soit} \quad A = \frac{3x - 4}{2x + 5}.$$

296. Signe d'un trinôme du second degré.

1er EXEMPLE. $y = x^2 - 2x + 6$.

$\Delta' = 1 - 6 = -5$. Le trinôme n'a pas de racines. On peut écrire (formule 1) :

$$y = (x - 1)^2 + 5.$$

L'expression $(x - 1)^2$ est positive ou nulle. Si on lui ajoute 5, le résultat est positif. Donc y est positif quel que soit x.

2e EXEMPLE. $y = -4x^2 + 12x - 9$.

$\Delta' = 36 - 36 = 0$. Le trinôme a une racine double $x = \frac{3}{2}\cdot$ On obtient

$$y = -4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

y est nul pour $x = \frac{3}{2}\cdot$ Pour $x \neq \frac{3}{2}$ l'expression $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ est positive et par suite y est négatif.

3e EXEMPLE. $y = 2x^2 - 4x - 30$ ou $y = 2(x^2 - 2x - 15)$.

Ce trinôme a deux racines $x' = -3$ et $x'' = 5$. On obtient :

$$y = 2(x + 3)(x - 5).$$

Nous sommes amenés à étudier le signe d'un produit de facteurs du 1er degré (no 168)

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 5$		$-$		$-$	0	$+$	
$y = 2(x + 3)(x - 5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le trinôme est nul pour $x = -3$ et $x = 5$, il est négatif pour $-3 < x < 5$ et il est positif pour $x < -3$ et pour $x > 5$.

297. Théorème. — 1o ***Si le discriminant du trinôme du second degré $y = ax^2 + bx + c$ est négatif, ce trinôme est du signe de a quel que soit x.***

2o Si le discriminant est nul, le trinôme est du signe de a sauf pour $x = -\frac{b}{2a}$, valeur pour laquelle il s'annule.

3o Si le discriminant est positif, le trinôme est du signe de a pour toute valeur de x extérieure aux racines et il est du signe opposé à celui de a pour toute valeur de x comprise entre les racines.

1er cas $\Delta < 0$. Prenons le trinôme sous la forme (1) (n° 294)

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Puisque $b^2 - 4ac < 0$, l'expression entre crochets est la somme d'un carré $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ positif ou nul et de la quantité $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ qui est positive; cette expression est positive et par suite y est du signe de a, quel que soit x.

2e cas $\Delta = 0$. On a : $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

L'expression $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ est nulle pour $x = -\frac{b}{2a}$. Elle est positive pour toutes les autres valeurs de x et par suite y est du signe de a.

3° cas $\Delta > 0$. Le trinôme a deux racines distinctes x' et x'' et on a :

$$y = a(x - x')(x - x'').$$

En supposant $x' < x''$ on obtient :

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
$x - x'$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x''$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x')(x - x'')$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a.	

On voit que y est du signe de a pour $x < x'$ et pour $x > x''$ et qu'il est du signe opposé à celui de a pour $x' < x < x''$.

RÉSUMÉ. — *Le trinôme du second degré $y = ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a sauf pour les valeurs de x égales aux racines ou comprises entre les racines lorsque celles-ci existent.*

298. Applications.

1° $y = -x^2 + 3x - 5$.

$a = -1$ et $\Delta = 9 - 20 = -11$. Le trinôme n'a pas de racines. Il est du signe de -1, donc négatif quel que soit x.

2° $y = x^2 - 10x + 25$.

$a = 1$ et $\Delta = 0$. Le trinôme a une racine double $x = 5$. Il est du signe de $+1$, donc positif pour $x \neq 5$.

3° $y = -2x^2 + 8x - 6$.

$a = -2$ et $a + b + c = 0$. Le trinôme a deux racines $x' = 1$ et $x'' = 3$. Il est négatif pour $x < 1$ et pour $x > 3$ et positif pour $1 < x < 3$.

Soit en résumé :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-2x^2 + 8x - 6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

299. Signe d'un produit ou d'un quotient de deux binômes du premier degré.

1er Exemple. — *Étudier le signe de* $y = (2x + 3)(4 - x)$.

Il est clair que y est un trinôme du second degré en x qui a pour racines $x' = -\frac{3}{2}$ et $x'' = 4$. On voit d'autre part que le coefficient de x^2 est -2. Donc :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
$(2x + 3)(4 - x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2e Exemple. — *Étudier suivant les valeurs de m le signe de l'expression*

$$\frac{2m + 5}{m - 3}.$$

Le signe d'un quotient est le même que celui du produit des deux termes : donc du produit $(2m + 5)(m - 3)$. Ce produit est un trinôme en m commençant par $2m^2$ et dont les racines sont $-\frac{5}{2}$ et $+3$. Donc :

m	$-\infty$		$-5/2$		3		$+\infty$
$\frac{2m + 5}{m - 3}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Le double trait vertical indique que pour $m = 3$, racine du dénominateur, la fraction n'est pas définie.

EXERCICES

— Étudier suivant les valeurs de x le signe des trinômes suivants :

831. $y = 3x^2 - 2x + 1$

832. $y = -x^2 + 6x - 9$.

833. $y = x^2 - 8x + 15$

834. $y = 5x^2 - 12x + 7$.

835. $y = (5x - 2)(3 - x)$ **836.** $y = (3x - 1)(x + 4)$.

837. $y = (x + 1)^2 - 4(x + 3)^2$ **838.** $y = (2x + 1)(x - 2) - (4x^2 + 2x)$.

— Simplifier les fractions :

839. $\dfrac{x^2 - 9x + 8}{x^2 - 3x + 2}$ **840.** $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 6}$ **841.** $\dfrac{2x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 5x - 3}$.

842. $\dfrac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 + x - 2}$ **843.** $\dfrac{x^4 - (5x - 6)^2}{(x^2 - 2)^2 - x^2}$ **844.** $\dfrac{x^2(x - 7)^2 - (3x - 5)^2}{(x^2 - 8x)^2 - (x + 10)^2}$

— Simplifier les expressions suivantes :

845. $\dfrac{x - 1}{x^2 - x - 2} - \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

846. $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} - \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3} + \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

847. $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} + \dfrac{1}{x^2 - 7x + 12}$.

848. $\dfrac{x + 7}{x^2 + 4x + 3} + \dfrac{x + 10}{x^2 - x - 2} + \dfrac{x - 7}{x^2 + x - 6}$.

849. $\dfrac{x + 2}{2x^2 - 7x + 3} - \dfrac{2x + 1}{4x^2 - 8x + 3}$.

850. $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x - 5} - \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 6x + 5} + \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 8x + 15}$.

— Étudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines des équations :

851. $x^2 - 2(m - 1)x - 3m + 7 = 0$.

852. $(m + 1)x^2 - (m + 3)x + 3 - m = 0$.

853. $mx^2 + 2(3m - 2)x + 4m - 3 = 0$.

854. $mx^2 - 2(3m - 4)x + 2m - 1 = 0$.

855. $x^2 - 2mx + 2m^2 - m - 6 = 0$.

856. $x^2 + 2(m + 2)x + 2m^2 + 15m - 8 = 0$.

857. Montrer que l'expression : $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ est un trinôme du second degré en a qui s'annule pour $a = b$ et $a = c$.

Utiliser ce résultat pour décomposer cette expression en un produit de trois facteurs.

858. Démontrer que l'expression : $841a^2 - 870ab + 225b^2$ est le carré d'un binôme.

En déduire la décomposition de l'expression : $196a^4 - 841a^2b^2 + 870ab^3 - 225b^4$ en un produit de quatre facteurs.

859. On considère le trinôme : $f(x) = (m - 3)x^2 + (m + 3)x - (m + 1)$.

1° Étudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation $f(x) = 0$.

2° Décomposer pour $m = -7$ le trinôme en un produit de facteurs du 1er degré.

3° Déterminer m de façon que les racines x' et x'' vérifient la relation

$$7(x' + x'') - 4(x'^2 + x''^2) = 1.$$

860. Soit l'équation : $x^2 - 2(2m + 1)x + 6m^2 - 5m + 1 = 0$.

1° Étudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de cette équation.

2° Calculer m pour que l'une des racines soit égale à 11 et déterminer l'autre racine.

3° Déterminer m de façon que les racines vérifient la relation : $3x' - x'' = 2$.

861. On considère l'équation : $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 5 = 0$.

1° Étudier suivant les valeurs de m, l'existence et le signe des racines.

2° Déterminer m de façon que les racines x' et x'' vérifient la relation : $3x' + 2x'' = 0$.

862. On donne l'équation : $(m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + 3(m - 3) = 0$.

1° Étudier l'existence et le signe des racines.

2° Calculer l'expression $(x' - 3)(x'' - 3)$. En déduire une relation indépendante de m entre ces racines.

3° Utiliser cette relation pour déterminer x', x'' et m pour que l'on ait $x' - 2x'' = 1$.

VINGT-NEUVIÈME LEÇON

* INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

300. Définition. — ***On appelle inéquation du second degré toute inéquation qui peut se mettre sous l'une des deux formes :***

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad (1) \qquad \text{ou} \qquad ax^2 + bx + c > 0 \quad (2)$$

Remarquons que la seconde forme se ramène à la première en multipliant les deux membres par -1 (n° 153).

Pour résoudre une telle inéquation, il suffit d'étudier le signe du trinôme $y = ax^2 + bx + c$ placé au premier membre et de conserver les valeurs de x qui satisfont à cette inéquation.

301. Exemples. — 1° *Résoudre l'inéquation* : $x^2 - 8x + 7 < 0$.

Le trinôme $x^2 - 8x + 7$ a pour racines $x' = 1$ et $x'' = 7$. Il est positif pour les valeurs de x extérieures aux racines et négatif pour les valeurs de x comprises entre les racines. Les valeurs de x qui conviennent sont donc comprises entre 1 et 7

$$1 < x < 7.$$

Soit graphiquement :

$-\infty$ 0 1 7 $+\infty$

Fig. 63.

2° *Résoudre l'inéquation* : $(x + 2)(3 - 2x) < 0$.

Le trinôme $(x + 2)(3 - 2x)$ a pour racines -2 et $\frac{3}{2}$. Le coefficient de x^2 est -2. Il est donc négatif pour les valeurs de x extérieures aux racines et positif pour les valeurs de x comprises entre les racines. Les valeurs de x qui conviennent sont donc telles que

$$x < -2 \qquad \text{ou} \qquad x > \frac{3}{2}.$$

Soit graphiquement :

$-\infty$ -2 0 $\frac{3}{2}$ $+\infty$

Fig. 64.

3° *Résoudre l'inéquation :* $3x^2 - x + 1 > 0$.

Le trinôme $3x^2 - x + 1$ n'a pas de racines. Il est positif quel que soit x. L'inéquation est donc vérifiée pour toute valeur de x.

4° *Résoudre l'inéquation :* $x^2 - 2x + 1 < 0$.

Le trinôme $x^2 - 2x + 1$ a une racine double $x = 1$. Il est nul pour cette valeur et il est positif pour les autres valeurs de x. Il ne peut être négatif et par suite l'inéquation est impossible.

302. Cas général. — Considérons l'inéquation

$$ax^2 + bx + c > 0$$

et étudions les différentes hypothèses qui peuvent se présenter :

1° *a* positif. Le trinôme $ax^2 + bx + c$ doit être du signe de a. Ceci a lieu pour toutes les valeurs de x, sauf celles qui sont égales aux racines ou comprises entre les racines lorsqu'elles existent (n° 297). On en conclut :

Si $\Delta < 0$ *l'inéquation est toujours vérifiée.*

Si $\Delta = 0$ *l'inéquation est vérifiée, sauf pour* $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Si $\Delta > 0$. Le trinôme a deux racines x' et x''. L'*inéquation est vérifiée pour les valeurs de x extérieures aux racines :* Soit pour $x < x' < x''$ et pour $x' < x'' < x$.

2° *a* négatif. Le trinôme $ax^2 + bx + c$ doit être du signe opposé à celui de a. Ceci ne peut se produire que lorsque le trinôme a des racines distinctes, pour les valeurs de x comprises entre les racines. Donc :

Si $\Delta \leqslant 0$. *L'inéquation est impossible.*

Si $\Delta > 0$. *L'inéquation est vérifiée pour* $x' < x < x''$.

Soit en résumé :

Inéquation : $ax^2 + bx + c > 0$.

$a > 0$	$\Delta < 0$	Toujours vérifiée
	$\Delta = 0$	$x \neq -\dfrac{b}{2a}$
	$\Delta < 0$	$x < x' < x''$; $x' < x'' < x$
$a < 0$	$\Delta \leqslant 0$	Jamais vérifiée
	$\Delta > 0$	$x' < x < x''$

On étudierait de même l'inéquation $ax^2 + bx + c < 0$. Le tableau que l'on obtient se déduit d'ailleurs du précédent en intervertissant $a > 0$ et $a < 0$.

* APPLICATIONS

303. Inéquations se ramenant au second degré. — On peut comme aux nos 166 et 167 résoudre les inéquations de la forme $AB > 0$ ou $\frac{A}{B} > 0$ dans lesquelles A et B sont des produits de facteurs du premier ou du second degré.

Exemple. — *Résoudre l'inéquation* $\frac{1}{x^2 - 5x + 4} < \frac{1}{x^2 - 7x + 10}$.

Cette inéquation s'écrit :

$$\frac{(x^2 - 7x + 10) - (x^2 - 5x + 4)}{(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 7x + 10)} < 0$$

soit:

$$\frac{-2x + 6}{(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 7x + 10)} < 0.$$

Étudions, suivant les valeurs de x le signe du premier membre. Le numérateur $-2x + 6$ s'annule pour $x = 3$, le premier facteur du dénominateur pour $x = 1$ et $x = 4$ et le second pour $x = 2$ et $x = 5$. On obtient :

x	$-\infty$		1		2		3		4		5		$+\infty$
$-2x + 6$		+		+		+	0	—		—		—	
$x^2 - 5x + 4$		+	0	—		—		—	0	+		+	
$x^2 - 7x + 10$		+		+	0	—		—		—	0	+	
1er membre		+	‖	—	‖	+	0	—	‖	+	‖	—	

L'inéquation est donc vérifiée pour :

$$1 < x < 2; \quad 3 < x < 4 \quad \text{ou} \quad x > 5.$$

304. Problème. — *Déterminer* m *de façon que l'équation*

$$mx^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$$

ait deux racines positives.

Écrivons que le discriminant, le produit et la somme des racines sont tous trois positifs. On obtient un système de trois inéquations simultanées (n° 159).

$$(m - 1)^2 - m(m - 3) > 0; \qquad \frac{m - 3}{m} > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{2(m - 1)}{m} > 0.$$

La première donne $m + 1 > 0$ soit $m > -1$.

La seconde donne $m > 3$ ou $m < 0$ et la troisième $m > 1$ ou $m < 0$.

$-\infty$ -1 0 1 3 $+\infty$

Fig. 65.

Les valeurs de m qui conviennent sont telles que :

$$-1 < m < 0 \quad \text{ou} \quad m > 3.$$

305. Réciproques du théorème relatif au signe d'un trinôme. — Considérons le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ et désignons par $f(\alpha)$ la valeur numérique de $f(x)$ pour $x = \alpha$.

$$f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$$

est le résultat de la substitution de α à x dans $f(x)$. Si $f(\alpha) = 0$, le nombre α est racine du trinôme. Ce cas mis à part étudions le signe de $a\,f(\alpha)$.

1°	$\Delta < 0$	Quel que soit α	$af(\alpha) > 0$
2°	$\Delta = 0$ et $\alpha \neq -\frac{b}{2a}$	....	$af(\alpha) > 0$
3°	$\Delta > 0$	α extérieur aux racines	$af(\alpha) > 0$
		α compris entre les racines	$af(\alpha) < 0$

La conclusion $af(\alpha) < 0$ exige $\Delta > 0$ et α compris entre les racines. De même si $a\,f(\alpha) > 0$ lorsque $\Delta > 0$, α est extérieur aux racines. Donc :

1° ***Si** $a\,f(\alpha)$ **est négatif, le trinôme** $f(x)$ **a des racines distinctes et** α **est compris entre ces racines.***

2° ***Si** $a\,f(\alpha)$ **est positif et si le trinôme** $f(x)$ **a des racines,** α **est extérieur aux racines.***

Si $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont de signes contraires, l'une des expressions $a\,f(\alpha)$ et $a\,f(\beta)$ est positive et l'autre négative. Donc :

3° ***Si** $f(\alpha)$ **et** $f(\beta)$ **sont de signes contraires, le trinôme** $f(x)$ **a des racines distinctes.*** On peut ajouter que l'un des deux nombres α ou β est compris entre les racines.

306. Application. — ***Montrer sans calculer le discriminant qu'une équation du second degré a deux racines distinctes.***

Le problème est déjà résolu lorsque les coefficients a et c de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont de signes contraires (n° 273). Les réciproques précédentes permettent de le résoudre dans d'autres cas.

EXEMPLE I. $15x^2 - 37x + 20 = 0.$

Faisons $f(1)$ dans le premier membre. On obtient $f(1) = -2$. D'après la première réciproque, on en déduit que l'équation à deux racines x' et x'' telles que

$$x' < 1 < x''.$$

EXEMPLE II. $m(x^2 - 4) + x(x - 5) = 0.$

L'expression $m(x^2 - 4)$ s'annule quel que soit m pour $x = +2$ et $x = -2$. On obtient $f(2) = -6$ et $f(-2) = +14$. Par suite d'après la troisième réciproque l'équation a deux racines x' et x'' et l'on peut ajouter qu'une des racines et une seule est comprise entre -2 et $+2$.

EXERCICES

— **Résoudre les inéquations suivantes :**

863. $2x^2 - 11x + 12 < 0$

864. $3x^2 + 14x + 15 < 0.$

865. $25x^2 - 70x + 49 > 0$

866. $-5x^2 + 19x + 4 > 0.$

867. $5x^2 + 2x - 3 < 0$

868. $6x^2 + 5x - 56 > 0.$

869. $(5 - x)(2x - 15) > 0$

870. $(2x + 1)(3x - 12) < 0.$

871. $\dfrac{2x - 7}{x + 4} - 1 < 0$

872. $\dfrac{5x - 12}{6 - x} + 3 < 0.$

— Résoudre les inéquations :

873. $(x^2 - 4)(x^2 - 4x + 3) >$

874. $(8x^2 - 22x + 15)^2 < 121(2x - 3)^2$

875. $\dfrac{18x - 6}{9(x - 3)} + \dfrac{x + 1}{2x - 1} < 0$

876. $\dfrac{7x - 10}{5x - 17} > \dfrac{25(x + 2)}{10x^2 - 49x + 51}.$

877. $\dfrac{x + 5}{2x - 1} + \dfrac{2x - 1}{x + 5} > 2$

878. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - 8} > \dfrac{1}{x + 1}.$

879. $\dfrac{2x + 7}{2(x + 1)} - \dfrac{x + 1}{x + 6} > 1$

880. $\dfrac{5}{x + 9} - \dfrac{2}{2x + 3} > \dfrac{7}{9(x + 1)}.$

— Résoudre les systèmes d'inéquations simultanées suivantes :

881. $\begin{cases} 2x^2 - 13x + 18 > 0 \\ 3x^2 - 20x - 7 < 0 \end{cases}$

882. $\begin{cases} 5x^2 - 24x - 77 > 0 \\ -2x^2 + 5x + 3 > 0. \end{cases}$

883. $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ 7x^2 - 31x - 20 < 0 \end{cases}$

884. $\begin{cases} x^2 - 14x + 1 > 0 \\ x^2 - 18x + 1 < 0. \end{cases}$

885. $\begin{cases} (5x - 6)^2 < x^4 \\ (x + 1)^2 (x - 10)^2 > (2x - 34)^2 \end{cases}$

886. $\begin{cases} (x^2 - 8x)^2 < (x + 10)^2 \\ (x^2 - 16x + 21)^2 > 36x^2. \end{cases}$

— Déterminer m de façon que les inégalités suivantes soient vérifiées quelle que soit la valeur donnée à x.

887. $(5m - 6)x^2 - 2mx + 1 > 0$.

888. $x^2 - (3m + 2)x + 2m^2 + 5m - 2 > 0$.

889. $mx^2 - 4(m + 1)x + m - 5 < 0$.

890. $mx^2 + (4m + 1)x + 5m + 2 < 0$.

891. $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 3(m - 2) > 0$.

892. $(m - 2)x^2 - 2mx + 3m - 4 > 0$.

893. Quelles valeurs faut-il donner à m de façon que l'équation

$$(2m - 1)x^2 - 2(m + 2)x + m + 8 = 0$$

ait deux racines de signes contraires.

894. Quelles valeurs faut-il donner à m pour que l'équation :

$$(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m + 2 = 0$$

ait deux racines positives.

— Montrer sans calculer le discriminant que les équations suivantes ont toujours deux racines distinctes :

895. $(x - 1)(x - 3) + (x - 2)(x - 4) = 0$.

896. $(2x - 1)(x + 3) + x^2 - 4 = 0$.

897. $(x + 2)(x - 5) + mx(x + 3) = 0$.

898. $m(x^2 - 9) + x(x - 5) = 0$.

899. $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$.

900. $m^2(x - a) + 3(x - a)(x - b) + 2p^2(x - b) = 0$.

TRENTIÈME LEÇON

PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

307. Définition. — ***Un problème est du second degré lorsque sa résolution conduit à une équation du second degré.***

Le choix de l'inconnue (ou des inconnues) et la mise en équation se font suivant les mêmes principes que pour les problèmes du premier degré (n° 197).

Il faut ensuite s'assurer :

1° Que l'équation finale à laquelle on aboutit, a des racines.

2° Que la solution correspondant à chacune de ces racines convient effectivement au problème proposé.

308. Exemple I. — *Trouver un nombre qui surpasse son inverse de* $\frac{15}{4}$.

MISE EN ÉQUATION. Soit x le nombre cherché. Il doit vérifier l'équation:

$$x - \frac{1}{x} = \frac{15}{4}.$$

Réciproquement toute racine de cette équation est solution du problème

RÉSOLUTION. L'équation s'écrit :

$$\frac{x^2 - 1}{x} = \frac{15}{4}.$$

Soit, en supposant $x \neq 0$:

$$4x^2 - 15x - 4 = 0.$$

Cette équation a deux racines de signes contraires :

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 64}}{8} = \frac{15 \pm 17}{8}.$$

Soit : $x' = 4$ et $x'' = -\frac{1}{4}$.

Ces deux nombres sont solutions du problème.

309. Exemple II. — *Trouver les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sachant que leur différence est égale à* 7 cm. *et que l'hypoténuse mesure* 13 cm.

MISE EN ÉQUATION. Désignons par x et y les deux côtés de l'angle droit. En supposant $x < y$, nous obtenons :

$$y - x = 7 \quad (1)$$

et d'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 + y^2 = 13^2. \quad (2)$$

RÉSOLUTION. D'après l'équation (1) : $y = x + 7$ (3)

Portons cette valeur, dans l'équation (2) :

$$x^2 + (x + 7)^2 = 169.$$

Soit $2x^2 + 14x - 120 = 0$

ou $x^2 + 7x - 60 = 0.$

Cette équation a deux racines de signes contraires 5 et -12. Seule la racine positive peut convenir.

Donc : $x = 5$ et d'après (3) : $y = 5 + 7 = 12.$

Le problème admet une solution $x = 5$ cm.; $y = 12$ cm.

310. Exemple III. — *Deux cyclistes qui roulent l'un vers l'autre se rencontrent après avoir parcouru, le premier* 90 km. *et le second,* 50 km. *Sachant que le premier était parti une demi-heure avant le second et qu'il a réalisé une vitesse horaire moyenne supérieure de* 10 km. *à celle du second, on demande de trouver la vitesse de chaque cycliste.*

MISE EN ÉQUATION. Soit x la vitesse horaire en km. du premier cycliste. La durée en heures de son trajet est : $\frac{90}{x}$. La vitesse horaire du second est : $x - 10$, et la durée de son trajet : $\frac{50}{x - 10}$. Nous obtenons donc :

$$\frac{90}{x} - \frac{50}{x - 10} = \frac{1}{2}.$$

RÉSOLUTION. Chassons les dénominateurs en supposant $x \neq 0$ et $x \neq 10$:

$$180(x - 10) - 100x = x(x - 10).$$

Soit : $x^2 - 90x + 1.800 = 0.$

Cette équation a deux racines : 60 et 30.

La première valeur conduit à une vitesse horaire de 60 km. invraisemblable pour un cycliste. La seconde donne la vitesse de 30 km. pour le premier cycliste et par suite de 20 km. pour le second, ce qui constitue une solution acceptable du problème.

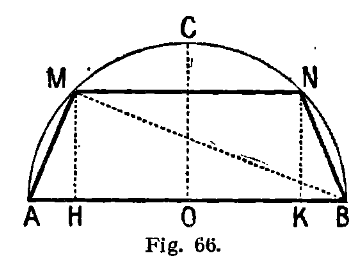


Fig. 66.

311. Exemple IV. — *Dans un demi-cercle de diamètre* AB = 2R *on inscrit un trapèze isocèle* AMNB. *Déterminer le point* M *de façon que* MN = 2AM.

MISE EN ÉQUATION. Posons AM = x (fig. 66).

Désignons par H et K les projections de MN sur AB. On a :

$$MN = HK = AB - 2AH = 2R - 2AH.$$

Or le triangle AMB est rectangle en M; donc : $\overline{AM}^2 = \overline{AB}.\overline{AH}$

ce qui donne $$AH = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AB}} = \frac{x^2}{2R}$$

D'où : $$MN = 2R - 2\frac{x^2}{2R} = 2R - \frac{x^2}{R}.$$

Écrivons que MN = 2AM. Nous obtenons :

$$2R - \frac{x^2}{R} = 2x.$$

Soit $$x^2 + 2Rx - 2R^2 = 0. \qquad (1)$$

Réciproquement toute racine de cette équation fournira une solution du problème pourvu que x soit positif et inférieur à AC. Soit :

$$0 < x < R\sqrt{2}.$$

RÉSOLUTION. L'équation (1) a deux racines de signes contraires. Seule peut convenir la racine positive :

$$x = -R + \sqrt{R^2 + 2R^2} = -R + R\sqrt{3}.$$

Soit $$x = R(\sqrt{3} - 1).$$

Cette racine convient car

$$0 < R(\sqrt{3} - 1) < R\sqrt{2}.$$

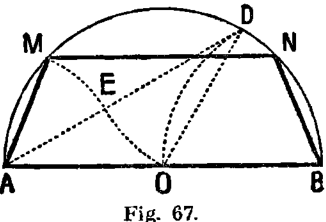


Fig. 67.

CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE. — Pour déterminer géométriquement le point M, nous sommes ramenés à construire la longueur $x = R(\sqrt{3} - 1) = R\sqrt{3} - R$.

Or $R\sqrt{3}$ est le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon R. Construisons le point D du demi-cercle tel que BD = R (fig. 67). Nous avons

$AD = R\sqrt{3}$. En prenant sur AD le point E tel que $DE = R$ nous obtenons $AE = R\sqrt{3} - R = R(\sqrt{3} - 1)$.

Il suffit alors de construire $AM = AE$ et de terminer le trapèze AMNB.

312. Exemple V. — *Soit un demi-cercle de diamètre* $AB = 2R$. *Trouver sur ce demi-cercle un point M tel que* $MA + MB = 2a$ *(a désignant une longueur donnée)* (fig. 68).

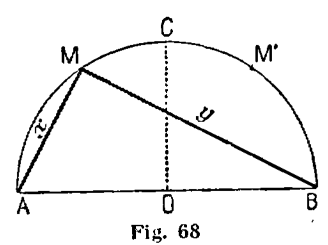


Fig. 68

MISE EN ÉQUATION. Posons $MA = x$ et $MB = y$.

La condition imposée par l'énoncé s'écrit

$$x + y = 2a \qquad (1)$$

D'autre part, d'après le théorème de Pythagore $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{AB}^2$.

Soit
$$x^2 + y^2 = 4R^2 \qquad (2)$$

Réciproquement tout couple de nombres positifs vérifiant le système formé par les équations (1) et (2) fournit une solution du problème. Il résulte en effet de l'équation (2) que l'on a alors $x^2 < 4R^2$, soit $x < 2R$ et on pourra par suite construire le point M.

RÉSOLUTION. Le système à résoudre est symétrique. On en déduit facilement :

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 4a^2$$

Soit :
$$4R^2 + 2xy = 4a^2.$$

D'où :
$$xy = 2(a^2 - R^2). \qquad (3)$$

D'après (1) et (3), x et y sont les racines de l'équation (n° 278) :

$$X^2 - 2aX + 2(a^2 - R^2) = 0.$$

DISCUSSION. 1° Cette équation a des racines si

$$\Delta' = a^2 - 2(a^2 - R^2) \geqslant 0 \quad \text{soit} \quad 2R^2 - a^2 \geqslant 0$$

c'est-à-dire si
$$a \leq R\sqrt{2}.$$

2° Pour que les deux racines soient positives, il faut et il suffit que leur somme $S = 2a$ et leur produit $P = 2(a^2 - R^2)$ soient positifs. Ce qui donne puisque a est positif
$$a^2 - R^2 \geqslant 0$$

Soit :
$$a \geqslant R.$$

Finalement, si $R < a < R\sqrt{2}$ x et y ont pour valeurs :

$$a + \sqrt{2R^2 - a^2} \quad \text{et} \quad a - \sqrt{2R^2 - a^2}$$

ce qui donne deux points M et M′ symétriques sur le demi-cercle.

Si $a = R$, les valeurs de x et de y sont 0 et $2R$ et correspondent à M en A ou en B.

Si $a = R\sqrt{2}$, on a $x = y = R\sqrt{2}$. Le point M se trouve en C au sommet du demi-cercle.

EXERCICES

901. Trouver deux nombres sachant que leur différence est égale à 16 et que la somme de leurs carrés est égale à 2.578.

902. Trouver deux nombres sachant que leur somme est égale à 17 et que la somme de leurs cubes est égale à 1.241.

903. Trouver deux nombres sachant que leur différence est égale à 4 et que la différence de leurs cubes est égale à 988.

904. Trouver les mesures des trois côtés d'un triangle rectangle sachant que ce sont trois nombres entiers consécutifs.

905. Trouver un nombre qui, additionné avec son inverse, donne 2,05.

906. Calculer les côtés d'un triangle rectangle sachant que son périmètre est égal à 56 cm. et que sa surface est égale à 84 cm². (On pourra calculer d'abord le rayon du cercle inscrit, puis l'hypoténuse.)

907. Trouver 3 nombres entiers consécutifs tels que leur produit soit les $\frac{24}{5}$ du carré du nombre intermédiaire.

908. On a payé 300 francs un certain nombre de mètres de ruban. Si l'on avait payé le mètre 5 francs de moins, on aurait eu pour le même prix 2 mètres de plus. Combien a-t-on acheté de mètres et quel est le prix du mètre?

909. Un marchand a acheté une pièce de drap 14.400 francs. Il en revend une partie pour 16.800 francs en faisant un bénéfice de 150 francs par mètre. Sachant qu'il lui reste 4 mètres, trouver la longueur de la pièce et le prix d'achat du mètre.

910. On doit partager une somme de 7.200 francs en un certain nombre de personnes. S'il y avait 5 personnes de moins la part de chacune se trouverait augmentée de 20 francs. Trouver le nombre réel de personnes.

911. Deux villes sont distantes de 450 km. Une automobile met 4 heures de moins qu'un camion pour aller de l'une à l'autre. Sachant que la vitesse horaire de l'automobile est supérieure de 30 km. à celle du camion, trouver les vitesses de chacun des véhicules.

912. Évaluer le nombre de diagonales d'un polygone convexe en fonction du nombre de ses côtés.
Calculer le nombre de côtés d'un polygone qui a 90 diagonales.

913. Un jardin rectangulaire a un périmètre de 280 mètres. On y trace intérieurement une allée périphérique dont la largeur est de 2 mètres. Il reste alors une superficie cultivable de 4.256 mètres carrés. Calculer les dimensions du jardin.

914. Un rectangle a une surface de 114 cm². Si on augmente chacune de ses dimensions de 2cm. 5 sa surface augmente de 60 cm². Trouver ses deux dimensions.

915. Deux capitaux placés au même taux valent ensemble 12.000 francs. Le premier augmenté de ses intérêts en 15 mois est égal à 3.780 francs. Le deuxième augmenté de ses intérêts pendant 11 mois est égal à 8.708 francs. Calculer le taux commun.

916. Deux capitaux ont pour somme 36.200 francs. Le premier rapporte annuellement 616 francs. Le deuxième placé à un taux supérieur de 1 % au taux du premier rapporte par an 1.040 francs. Calculer les deux sommes et les taux respectifs.

917. Un tissu revient à 750 francs le mètre au fabricant. Ce dernier le livre à un détaillant qui le revend 1.125 fr. en gagnant 5 % de plus sur le prix d'achat que le fabricant n'a lui-même gagné sur le prix de revient. Quel est le pourcentage du bénéfice du fabricant et celui du détaillant.

918. Un travail qui nécessite 420 journées d'ouvriers est entrepris par une équipe. Trouver le nombre d'ouvriers de cette équipe sachant que si elle comprenait 5 ouvriers de plus elle mettrait 7 jours de moins pour effectuer le travail.

919. Un bateau se déplace sur un fleuve dont le courant a une vitesse de 3 km. à l'heure. Après avoir parcouru 36 km. il revient à son point de départ. Sachant qu'il a mis 5 heures pour effectuer le trajet total, trouver la vitesse propre du bateau.

920. Un avion dont la vitesse par temps calme est 280 km. à l'heure fait le trajet entre deux villes A et B distantes de 960 km. A l'aller de A à B il est gêné par le vent et met 1 heure de plus qu'au retour de B vers A où il est aidé par le vent. Trouver la vitesse à l'heure du vent.

921. Deux automobiles partent ensemble pour effectuer un trajet de 270 km. La première a une vitesse horaire supérieure de 12 km. à celle de la seconde et arrive 45 minutes avant la seconde à destination. Calculer la vitesse de chaque voiture.

922. Un robinet alimente un réservoir de 2.400 litres. Si le robinet débitait 8 litres de plus à la minute, il faudrait 10 minutes de moins pour remplir le réservoir. Calculer le débit à la minute du robinet.

923. Soit un segment AB = a. Trouver sur la droite AB un point M tel que $\overline{AM}^2 = \overline{AB}.\overline{MB}$.

924. Étant donné deux points A et B tels que AB = 11 cm., déterminer entre A et B un point M tel que la somme des aires des carrés construits sur AM et MB comme côtés soit égale à 65 cm².

925. Sur un axe Ox on prend un point A d'abscisse $\overline{OA} = a$. Trouver l'abscisse x d'un point M tel que : $\overline{OM}^2 + 2\overline{MA}^2 = 6a^2$.

926. Soit un triangle équilatéral ABC de côté a. On prend sur BA le point M et sur AC le point N tels que BM = AN = x. Calculer x de façon que l'aire du triangle AMN soit égale aux $\frac{2}{9}$ de celle du triangle ABC.

927. Soit un triangle rectangle isocèle OAB tel que OA = OB = a. On prend sur OA un point M et sur OB un point N et on pose OM = x et ON = y.

1° Déterminer la relation entre x, y et a pour que : MN = MA + NB.

2° Calculer x et y pour que l'on ait alors : $x + y = \frac{7a}{6}$.

928. Soit un demi-cercle de diamètre AB = 2R. On mène d'un point M de ce demi-cercle la perpendiculaire MC à la tangente en B. Déterminer la longueur AM = x de manière que : AM + MC = $\frac{19}{8}$ R.

929. Inscrire dans un demi-cercle de diamètre AB un trapèze isocèle AMNB de manière que la somme des bases soit les $\frac{3}{2}$ de la somme des côtés non parallèles.

930. Soit un demi-cercle de diamètre AB = 2R et le rayon OC perpendiculaire à ce diamètre. On prend un point M sur le cercle et on mène les perpendiculaires MH à AB et MK à OC. Déterminer AH = x de façon que : $2\overline{MA}^2 = 15\,\overline{MK}^2$.

931. Soit un triangle ABC tel que : AB = $8a$, BC = $7a$ et $\widehat{BAC} = 60°$. Calculer la longueur x du côté AC.

932. Soit un demi-cercle de diamètre AB = $2a$. Une tangente au demi-cercle coupe en M et N les tangentes en A et B.

1° Démontrer les relations : AM + BN = MN et AM.BN = a^2.

2° Déterminer la tangente MN pour que le périmètre du trapèze AMNB soit égal à $7a$.

933. On considère un demi-cercle de diamètre AB = 2R. Trouver sur ce demi-cercle un point M tel que : MA — MB = $\frac{2R}{5}$. On prendra : MA = x et MB = y.

934. Soit un demi-cercle de diamètre AB = 2R et P la projection sur AB d'un point M de ce demi-cercle. Déterminer le point M de façon que AP + PM = $\frac{12R}{5}$. Poser : PM = x et AP = y.

935. Déterminer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle connaissant leur somme a et l'aire S du triangle.

Application : a = 30 cm; S = 110 cm²,5.

936. Dans un triangle rectangle l'hypoténuse a pour longueur a et le demi-périmètre la longueur p. Calculer les côtés x et y du triangle. Discuter.

Cas particulier où $p = \frac{6a}{5}$.

PROBLÈMES DE RÉVISION

937. Le service rapide qui fonctionne entre Paris et New-York répond aux conditions suivantes : Un avion quitte Paris et effectue le 1/6 du trajet à la vitesse de 210 km. à l'heure; il rejoint en mer un paquebot qui parcourt les 2/3 du trajet à la vitesse de 40 km. à l'heure. Le reste du trajet est effectué en avion dans les mêmes conditions qu'au départ. Une lettre met ainsi 88 heures pour être transportée de Paris à New-York. Calculez la longueur du trajet.

938. On range un tas de pommes supposées identiques dans des paniers identiques et l'on calcule qu'il faudra 92 paniers et qu'il restera 27 pommes. En ajoutant à ce tas les 198 pommes provenant d'une autre cueillette, on constate qu'il faudra 97 paniers et qu'il n'y aura pas de reste. Calculer le nombre de pommes par panier et le nombre de pommes du premier tas.

939. 2 vases de même poids contiennent des quantités d'eau différentes. Le poids total du 1er est les 4/5 du poids total du 2e; si l'on verse le contenu du 2e dans le 1er, le poids de celui-ci est alors 8 fois celui du second vide. Sachant que le poids de l'eau contenue dans le 2e surpasse de 50 gr. le poids de l'eau contenue dans le 1er, on demande le poids de chaque vase et le poids de liquide qu'il contenait primitivement.

940. On considère un rectangle dont le périmètre mesuré en mètres est $2p$. Si l'on augmente la longueur de 5 m. et la largeur de 3 m., la surface augmente de 195 m^2.

1° Calculer, en fonction de p, les deux dimensions;

2° Appliquer la formule au cas où $p = 50$;

3° Pour quelles valeurs de p le problème est-il possible? — Pour quelles valeurs de p le rectangle présente-t-il des propriétés particulières?

941. Trois enfants, A, B, C, font une partie de billes. Avant la partie, ils possèdent des nombres de billes respectivement proportionnels aux nombres 3, 4, 5.

1° Quelle fraction du nombre total des billes chaque enfant possède-t-il?

2° Après la partie, les nombres de billes des enfants sont respectivement proportionnels aux nombres 15, 16, 17. Qui a gagné ou perdu?

3° L'un des enfants a gagné 9 billes. Quel est le nombre total des billes?

942. Trois frères ont acheté une propriété pour 100.000 francs. Le cadet dit qu'il pourrait la payer seul si le plus jeune lui donnait la moitié de son argent; le plus jeune dit qu'il la paierait seul si l'aîné lui donnait le tiers seulement de son argent; enfin l'aîné ne demande que le quart de l'argent du cadet pour payer seul la propriété. Combien chacun avait-il d'argent?

943. Un nombre de 3 chiffres N étant donné, on compose un deuxième nombre N' ayant même chiffre des dizaines que N et ayant respectivement pour chiffres des unités et des centaines les chiffres des centaines et des unités de N.

1° A quelle condition aura-t-on N plus grand que N'?

2° Démontrer que N — N' est un multiple de 99;

3° Calculer tous les nombres N sachant que N — N' = 594 et que la somme du chiffre des centaines et du chiffre des unités de N est égale à 8.

944. Un cycliste parcourt une route AB qui comprend du terrain plat, des montées et des descentes. Sur le terrain plat, sa vitesse est de 24 km. à l'heure; en montée, elle est de 16 km. à l'heure; en descente, de 30 km. à l'heure.

De A vers B, le cycliste met 5 heures. De B vers A, il met 4 h. 39.

Sachant que les parties horizontales de la route ont 56 km., on demande la longueur des montées et celle des descentes (dans le sens de A vers B).

945. Un cycliste parcourt un trajet AB qui comporte des montées, des paliers et des descentes. Les vitesses moyennes sont de 10 km. à l'heure en montée, 20 km. à l'heure en plaine, 30 km. à l'heure en descente.

Dans le sens de A vers B il met 6 h. 50.

Dans le sens de B vers A il met 7 h. 30.

Le trajet total AB comportant 120 km., on demande la longueur des montées, des paliers et des descentes.

946. Un piéton se rend d'un point A à un point B à la vitesse de 4 km. 500 à l'heure. A un moment donné, pour arriver plus vite à destination, il monte dans un tramway allant également de A vers B, à la vitesse de 16 km. 500 à l'heure, et qui est parti de A 40 minutes après le piéton. Celui-ci arrive en B 72 minutes plus tôt que s'il avait fait toute la route à pied. On demande :

1° A quelle distance de A le piéton est monté en tramway?

2° Quelle est la distance de A à B?

947. Soient les fonctions : $y = 3x + 2$ représentée par la droite D et $y = mx$ représentée par la droite D' (m est un nombre quelconque, positif ou négatif).

1° Représenter graphiquement les deux fonctions : $y = mx$ et $y = 3x + 2$. (On prendra par exemple, $m = 4$).

2° Soit P le point d'intersection des droites D et D'. Calculer les coordonnées de P en fonction de m.

3° Étudier, à l'aide du graphique, comment se déplace le point P sur la droite D lorsque m varie de $-\infty$ à $+\infty$.

948. On considère les deux fonctions $y = 2x + 1$; $y = -\frac{x}{2} + 1$ et les droites qui les représentent.

1° Calculer les coordonnées des points où ces droites coupent les axes;

2° Soit A le point de rencontre des deux droites. Calculer ses coordonnées;

3° Soient B et C les points où les deux droites rencontrent respectivement l'axe $x'Ox$. Prouver que le triangle ABC est rectangle;

4° La propriété précédente est-elle modifiée si l'on envisage des fonctions :

$$y = ax + 1; \qquad y = -\frac{x}{a} + 1?$$

Quand a varie le cercle circonscrit au triangle ABC n'a-t-il pas un second point fixe?

949. 1° Construire les courbes représentatives des fonctions :

$$y = x + 4, \qquad y = -\frac{2}{3}x - 1, \qquad y = -4x + 9.$$

2° Les trois droites obtenues forment un triangle ABC. Trouver les coordonnées des points milieux des côtés de ce triangle.

3° Former l'équation des médianes du triangle ABC.

4° Trouver les coordonnées du centre de gravité de ce triangle.

950. Dans tout ce qui suit, on supposera x variable non inférieur à a constant.
On considère un carré C de côté x cm. On mène parallèlement à chacun de ses côtés les deux droites situées à la distance a cm. de ce côté. Les quatre droites extérieures à C forment un carré C_1, les quatre autres un carré C_2.

1° Calculer la longueur du côté de C_1 et celle du côté de C_2.

2° Calculer les surfaces de chacun des carrés C_1 et C_2.

3° Calculer la surface y comprise entre C_1 et C et la surface z comprise entre C et C_2.

4° On suppose $a = \frac{1}{2}$: représenter sur un même graphique les variations de y et z.

5° Montrer par le calcul qu'il existe entre y et z une relation indépendante de x. Pouvait-on prévoir cette relation d'après le graphique? Peut-on la justifier sur la figure formée par C, C_1, C_2?

951. 1° Résoudre le système à deux inconnues : $3x + my = 4; 5x + 2y = 25$ dans lequel m est un nombre donné, positif ou négatif.

Appliquez les formules trouvées au calcul des valeurs numériques de x et de y dans le cas particulier où $m = -1$.

2° Déterminez ces mêmes valeurs numériques de x et de y lorsque $m = -1$ en employant une méthode graphique.

952. Un cycliste doit parcourir une distance AB, aller et retour. Il fait l'aller à la vitesse constante de 25 km. à l'heure et le retour à la vitesse constante de 20 km. à l'heure. Il s'arrête 1 h. en B. La durée du trajet aller et retour est de 10 h. arrêt compris.

1° Calculer la distance AB.

2° Représenter sur un même graphique le mouvement du cycliste depuis son départ de A jusqu'à son retour en A (Porter en abscisses les espaces : 1 cm. pour 10 km. et en ordonnées les temps : 1 cm. pour 1 h.).

3° Un automobiliste est parti de A quatre heures ½ après le départ du cycliste, il fait 60 km. à l'heure. Trouver au bout de combien de temps et à quelle distance de B il rencontrera le cycliste.

4° Tracer sur le graphique la droite représentative du mouvement de l'automobiliste. Indiquer où sont figurées, sur le graphique, les réponses aux questions du n° 3.

953. Un cycliste et un piéton parcourent dans le même sens une route rectiligne Ax. Ils partent en même temps de deux points A et B distants de 45 km. On sait que la vitesse du cycliste vaut 4 fois celle du piéton. On demande :

1° De déterminer à quelle distance de A sera le point P où le cycliste atteindra le piéton?

2° De dire à quelle distance de A était le piéton lorsqu'il avait sur le cycliste une avance de 9 km.

3° Le rappport des vitesses devenant $\frac{5}{16}$ dès le début du mouvement, déterminer à quelle distance de A sera le piéton lorsque le cycliste aura sur lui une avance de 10 km.

Représentation graphique des résultats des 2 premières questions en prenant comme vitesse du piéton 3 km. à l'heure.

954. Un train ayant 300 mètres de long se déplace d'un mouvement uniforme. Il met 36 secondes à passer devant un observateur immobile. Quelle est sa vitesse?

Un train marchant en sens inverse d'un mouvement uniforme croise le 1er en 24 secondes, c'est-à-dire qu'il s'écoule 24 secondes entre le moment où les têtes des trains arrivent en face l'une de l'autre et le moment où les queues cessent d'être en face l'une de l'autre. Ce 2e train met 18 secondes pour passer devant l'observateur immobile. Déterminer la vitesse et la longueur du 2e train (on résoudra de préférence ce problème par un graphique).

955. Deux voyageurs se trouvent ensemble en un point C sur une route AB. L'un se dirige de C vers B en faisant 4 km. 400 à l'heure, le 2e dans le sens opposé en faisant 5 km. 800 à l'heure. Ils partent ensemble à 12 h. ½. A quelle heure seront-ils séparés l'un de l'autre par une distance de 38 km. 450? On fournira une solution graphique.

956. Un train effectue le parcours Paris-Caen (239 km.) avec arrêt d'une minute à Evreux (108 km. de Paris) et à Lisieux (191 km. de Paris). Ce train part de Paris à 13 h. 10, d'Evreux à 14 h. 18, de Lisieux à 15 h. 10 et arrive à Caen à 15 h. 40.

Un 2e rapide part de Caen à 12 h. 50 et arrive à Paris à 15 h. 54 sans arrêt intermédiaire.

Déterminer graphiquement l'instant où les deux trains se croisent.

Il arrive un jour qu'une réparation prolonge l'arrêt à Evreux du 1er train; celui-ci rencontre alors le 2e rapide 5 minutes après l'heure habituelle. Déterminer graphiquement le temps dont l'arrêt à Evreux a été prolongé.

957. Résoudre graphiquement le problème suivant : Deux villes A et B distantes de 250 km. sont reliées par une ligne de chemin de fer avec une station intermédiaire C, située à 100 km. de A. Un train part de A à 8 heures et fait 75 km. à l'heure. Arrivé en C, il s'arrête 10 minutes et repart vers B avec une vitesse de 60 km. à l'heure. Un autre train part de B à 8 h. 30 avec une vitesse de 90 km. à l'heure, s'arrête en C pendant 10 minutes et repart vers A avec une vitesse de 80 km. à l'heure. En quel point et à quelle heure les 2 trains se croisent-ils?

958. On donne le système :

$$(m - 1)x + 2y = m + 1 \qquad (1)$$

$$mx + 2my = m + 4. \qquad (2)$$

1° Résoudre ce système pour $m = 3$.

2° On construit la droite d'équation (2) par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$. Comment se déplace-t-elle quand m varie? On construit également la droite d'équation (1). Montrer qu'elle tourne autour d'un point fixe quand m varie. Comment sont les droites (1) et (2) lorsque $m = 2$?

3° *a)* Dans le cas où m est un nombre algébrique quelconque, quelles sont les coordonnées du point d'intersection I des deux droites définies par le système donné?

b) Montrer que I se déplace sur une droite fixe quand m varie.

c) Pour quelles valeurs de m le point d'intersection est-il dans le quatrième quadrant $y'Ox$?

4° Déterminer m pour que la droite d'équation (1) coupe Ox et Oy en deux points A et B tels que $OA + OB = l$; l étant une longueur donnée mesurée avec les mêmes unités que x et y. Le problème est-il possible pour toutes les valeurs de l?

959. 1° Trouver deux nombres, sachant que leur somme est 15 et leur produit 36.

2° Ces deux nombres étant les extrêmes d'une proportion, calculer les deux moyens de cette proportion sachant que la somme de ces moyens est 13.

960. 1° Le périmètre d'un rectangle mesure 28 mètres et sa diagonale 10 mètres. Calculer ses deux dimensions.

2° Même question si les mesures du périmètre et de la diagonale faites avec la même unité sont respectivement $2p$ et 10. Conditions de possibilité du problème.

961. La différence entre la superficie de 2 terrains carrés est 464 m². La différence entre leurs périmètres est de 32 m. Ils ont été vendus de la façon suivante : Le plus grand a été payé comptant; le 2e sera payé 4 mois plus tard.

On versera alors le prix d'achat augmenté de ses intérêts à 6 %, soit une somme totale de 191.250 francs.

Sachant que le prix du mètre carré est le même dans les deux cas, trouver le prix du mètre carré et le prix de vente du 1er terrain.

962. Un tapis rectangulaire étant usé sur les bords, on enlève tout autour une bande d'étoffe; pour cela, on coupe de chaque côté du tapis, une bande de 0 m. 50 de large. Sachant que la partie restante du tapis a une longueur double de la largeur et que sa surface est équivalente à celle de la partie enlevée, trouver les dimensions nouvelles du tapis.

963. Un automobiliste avait calculé qu'à la vitesse moyenne x qu'il se proposait de faire au cours d'un voyage de 234 km., il arriverait au but à 13 heures.

Lorsque le tiers du trajet est parcouru, il s'aperçoit que sa vitesse moyenne n'a été que les 3/4 de celle qu'il avait espérée. A quelle distance du point de départ aurait-il dû se trouver à ce moment s'il avait fait la vitesse escomptée?

Il veut rattraper son retard, et dans le reste du parcours, il réussit à maintenir une vitesse moyenne horaire supérieure de 8 km. à celle qu'il s'était proposée. Il n'arrive néanmoins qu'à 13 h. 6 au terme du voyage. Quelle a été la durée réelle de son voyage? (Critiquer la vraisemblance des valeurs trouvées pour la vitesse moyenne x et ne retenir que la solution vraisemblable.)

964. 1° Représenter graphiquement les fonctions

$$y = x^2; \qquad y = 3 - 2x.$$

2° Quelles sont les coordonnées des points de rencontre A et B des deux courbes? Vérifier, par le calcul, les résultats obtenus.

3° Déterminer les distances des points A et B à l'origine des coordonnées, ainsi que la longueur AB.

965. 1° Construire la courbe : $y = \frac{x^2}{2}$.

2° Une droite coupe cette courbe en deux points A et B dont les abscisses sont $x = 1$ pour le point A et $x = -2$ pour le point B; faire figurer cette droite sur le graphique précédent et déterminer algébriquement son équation.

3° Par le point O d'intersection des axes de coordonnées on mène une parallèle D à la droite AB; donnez son équation et calculez les coordonnées des points d'intersection de cette deuxième droite avec la courbe $y = \frac{x^2}{2}$.

966. 1° Trouver un nombre tel que si l'on ajoute 10 à son triple on obtienne son carré.

2° Tableaux des variations et courbes représentatives des fonctions

$$y = x^2 \quad \text{et} \quad y = 3x + 10.$$

Ces courbes étant tracées avec soin, ne peut-on pas les utiliser pour résoudre graphiquement le problème précédent?

967. On donne un triangle équilatéral OAB de côté AB = 5 cm., M est sur OA entre O et A, R sur OB entre O et B, OM = OR.

La parallèle à OB menée par M et la parallèle à OA menée par R se coupent en P. OP coupe AB en S. On pose OM = x.

1° Exprimer OP et SP en fonction de x et construire sur les mêmes axes de coordonnées les courbes représentant les variations de OP et SP, lorsque x varie de 0 à 2,5 cm. Utilisant ces courbes déterminer x tel que OP = SP.

2° Représenter graphiquement la surface S_1 du quadrilatère OMPR en fonction de x et, avec les mêmes axes la surface S_2 d'un rectangle dont les côtés sont AB et $\frac{x}{2}$ lorsque x varie de 0 à 5 cm.

Déterminer graphiquement et algébriquement x tel que $S_1 = S_2$.

3° Représenter graphiquement SP en fonction de x lorsque x varie de 0 à 5 cm.

968. 1° Représenter graphiquement la variation de la fonction $y = \frac{x^2}{4}$ quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$. *(Prendre le centimètre pour unité sur chacun des deux axes.)*

2° Sur ce graphique placer : *a)* le point A d'abscisse 0 et d'ordonnée + 1; *b)* la droite D dont tous les points ont pour ordonnée — 1; *c)* le point M ayant pour abscisse + 4 et situé sur la courbe $y = \frac{x^2}{4}$.

Calculer la distance du point M au point A et la distance MH du point M à la droite D. Que remarquez-vous?

Montrer que cette propriété subsiste pour un point M quelconque de la courbe $y = \frac{x^2}{4}$. *(On pourra appeler α son abscisse.)*

3° Quelles sont les coordonnées du milieu P de AH : *a)* quand l'abscisse de M est + 4; *b)* quand l'abscisse de M est α? Quelle ligne décrit le point P quand M parcourt le graphique?

969. 1° Représenter sur le même graphique les variations des fonctions $y = x - 1$ et $y = \frac{2}{x}$. Les courbes se coupent en deux points A et B. Déterminer graphiquement les coordonnées de ces points.

2° Retrouver par le calcul les coordonnées de ces points.

3° Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes représentant les fonctions $y = -x + \sqrt{2}$ et $y = \frac{3}{x}$. Que peut-on conclure du résultat?

4° On considère une fonction de la forme $y = ax^2$. Déterminer a pour que la courbe représentant cette fonction passe par l'un des points A ou B de la première question. Tracer la ou les courbes correspondant aux résultats trouvés et dites si elles vous permettent de faire quelque remarque.

970. On considère la fonction $y = mx + 2m$, dans laquelle x désigne la variable indépendante et m un nombre donné.

1° Tracer les droites D_1 et D_2 qui représentent la variation de cette fonction pour $m = 1$ et pour $m = -2$; trouver les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

2° Sur la figure portant les deux droites D_1 et D_2, représenter graphiquement les fonctions $y = x^2$, $y = \frac{3}{x}$.

3° Calculer les coordonnées des points d'intersection de la droite D_1 avec les deux courbes obtenues au 2°.

971. On trace deux axes de coordonnées perpendiculaires et on adopte le centimètre comme unité pour la mesure des abscisses et des ordonnées.

1° Construire — sans explications — la ligne (D) qui représente les variations de la fonction $y = x - 3$ et la ligne (H) qui représente les variations de la fonction $y = \frac{4}{x}$.

2° Chercher sur le graphique les coordonnées des points d'intersection A et B de (D) et de (H). Retrouver ces coordonnées par le calcul. Calculer la distance AB à 1 mm. près.

3° k étant un nombre variable, on propose de former l'équation fournissant les abscisses x des points d'intersection de la ligne (H) avec la droite (L) qui représente les variations de la fonction $y = -x + k$.

Déterminer k pour que cette équation admette une racine double : tracer sur le graphique les deux droites (L) correspondant à ces valeurs particulières de k.

972. 1° Trouver les dimensions d'un rectangle connaissant la surface de ce rectangle : 180 m^2 et le périmètre : 56 m.

2° Représenter graphiquement les variations de la longueur de ce rectangle en fonction de la largeur si la surface de ce rectangle reste constamment égale à 180 m^2.

Représenter graphiquement les variations de la longueur de ce rectangle en fonction de la largeur si le périmètre de ce rectangle reste constamment égal à 56 m.

3° Les deux courbes précédentes étant tracées dans un même système d'axes de coordonnées, montrer que l'intersection de ces courbes donne la solution graphique du problème proposé dans la 1re question.

4° Trouver la relation qui doit exister entre les quantités S et $2p$ représentant respectivement la surface et le périmètre d'un rectangle pour que l'on puisse construire un tel rectangle.

En utilisant les graphiques précédemment construits quelle est la valeur minimum du périmètre quand la surface est 180 m^2?

973. 1° Calculer les dimensions d'un rectangle connaissant sa surface 24 m^2 et sachant que sa largeur est inférieure de 1 m. à sa demi-longueur.

2° Représenter avec un même système d'axes de coordonnées les fonctions

$$y = \frac{24}{x} \quad \text{et} \quad y = \frac{x}{2} - 1.$$

Montrer que la figure donne une solution graphique de la première question.

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE I

CALCUL ALGÉBRIQUE

LIVRE II

LE PREMIER DEGRÉ

LIVRE III

LES FONCTIONS

LIVRE IV

LE SECOND DEGRÉ

Imprimé en France
TYPOGRAPHIE FIRMIN-DIDOT ET C[ie]. — MESNIL (EURE). - 074/53
Dépôt légal : Décembre 1947

CONTES ET LÉGENDES

Nouveautés.

Contes et Légendes de Normandie.
Contes et Légendes de Champagne.
Contes et Légendes Basques.
Contes et Légendes de Provence.
Contes et Légendes de l'Inde.
Contes et Légendes de Bohême.
Contes et Légendes d'Anjou.
Contes et Légendes de Sicile.
Contes et Légendes d'Auvergne.

L'ANTIQUITÉ

Contes et légendes :

Mythologiques.
De l'Égypte ancienne.
Du Monde grec et barbare.
De la naissance de Rome.
Tirés de "l'Iliade" et de "l'Odyssée".
Tirés de "l'Énéide".
Tirés du Théâtre grec.
D'Israël.

L'HISTOIRE DE FRANCE

Contes et légendes :

Du Moyen Age français.
Du Grand Siècle.
De la Révolution française.

LES PROVINCES FRANÇAISES

Contes et légendes :

De Paris et de Montmartre.
D'Armorique.
De Flandre.
De Corse.

Etc., etc.

LE MONDE

Contes et légendes :

Du Japon.
De Chine.
Persans.

L'UNION FRANÇAISE

Algériens.
Du Maroc.
De l'Afrique noire.
D'Indochine.

Contes et légendes :

D'Orient.
Du Far-West.
Du Canada.
D'Outre-Manche.
D'Outre-Rhin.
Populaires russes.
Du Terroir russe.
De Finlande.
De Hongrie.
Napolitains.
Suisses.
De la Mer et des Marins.
Du pays d'Irlande.
De Pologne.
D'Écosse.
Récits et Aventures polaires.

LITTÉRATURE

De Molière.
De Corneille.
De Racine.
De Shakespeare.

Chaque volume relié avec lettrines, culs-de-lampe et 12 planches en couleurs.

»